Sia k la curva di equazione:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+2}$$

a) la curva k è appartiene al semipiano positivo quando

$$\frac{x^2+2}{x^3+2}>0$$

cioè per

$$x>\sqrt[3]{-2}$$

mentre appartiene al semipiano negativo per

$$x<\sqrt[3]{-2}$$

Per $x=\sqrt[3]{-2}$ la curva presenta un punto di discontinuità di 2^a specie

b) La parabola Γ passante per l'origine ed avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y ha equazione del tipo:

$$y=ax^2+bx$$

Passa inoltre per il punto di ascissa $x=-1$. Si ha

$$f(-1)=3 \qquad y(-1)=a-b$$

imponendo il passaggio per il punto $(-1;3)$ otteniamo

$$a=b+3$$

e quindi l'equazione della parabola diviene

$$y=(b+3)x^2+bx$$

Tenendo presente che la curva Γ incide ortogonalmente con la curva k deve essere $mm'=-1$.
Essendo $m=f'(x_0)$ si ha

$$f'(x)=\frac{x(-x^3-6x+4)}{(x^3+2)^2}$$

$$f'(-1)=-11$$

essendo $m'=y'(x_0)$ otteniamo

$$y'=2(b-3)x+b$$

$$y'(-1)=-b-6$$

e quindi

$$-11(-b-6)=-1$$

da cui

$$b=-\frac{67}{11}$$

La parabola Γ ha quindi equazione

$$\Gamma: y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x$$

La retta tangente alla curva k ha equazione

$$t: y-3=-11(x+1)$$

$$t: y=-11x-8$$

c) Per verificare se la retta t, tangente a k in $x=-1$ ha altri punti in comune con k, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \dfrac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$$

da cui si ha

$$11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$$

Abbassando di grado con la regola di Ruffini otteniamo

$$(x+1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$$

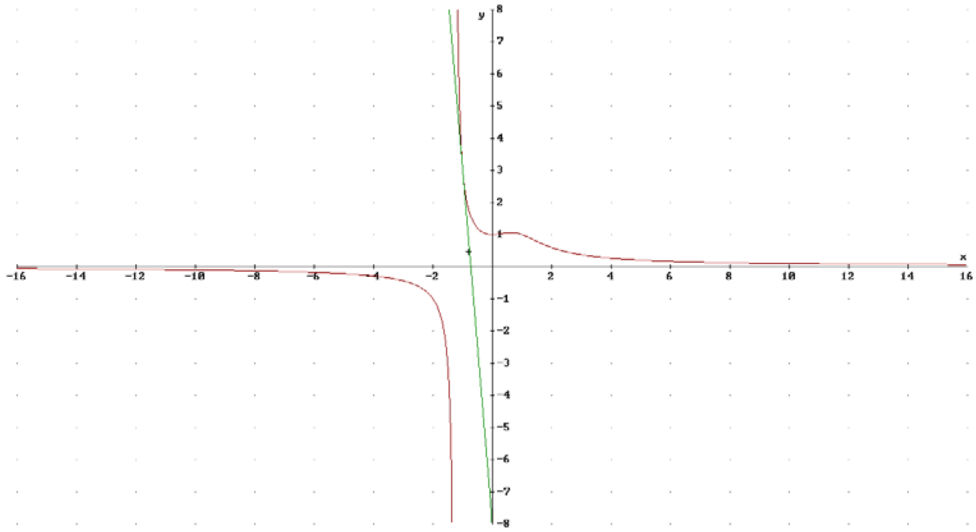
ossia

$$(x+1)^2 = 0$$

$x = -1$ (soluzione doppia) e

$$11x^2 - 14x + 18 = 0$$

essendo $\Delta < 0$ non vi sono soluzioni reali, per cui la retta t non ha altri punti in comune con k.



d) La curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x nei punti in cui $f'(x) = 0$, ossia

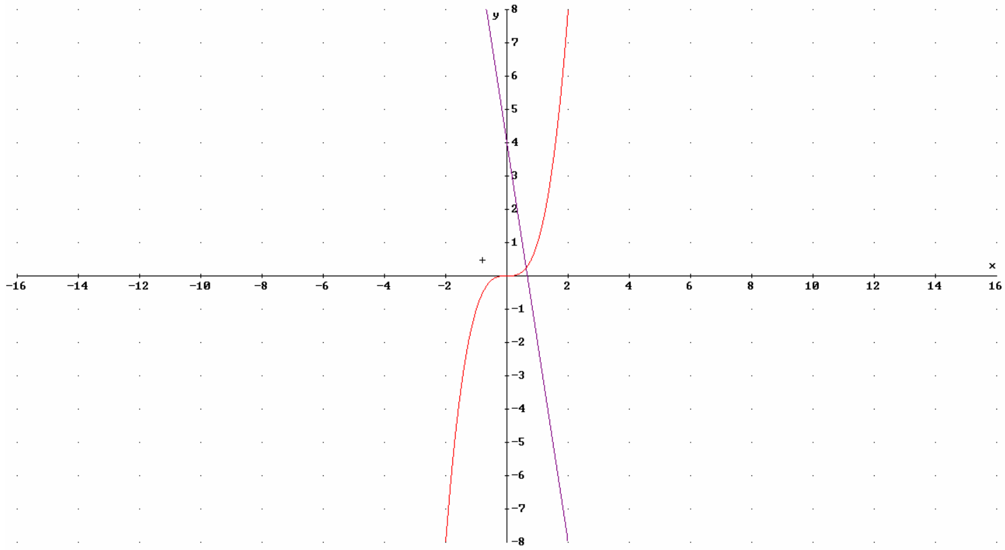
$$x(-x^3 - 6x + 4) = 0$$

cioè per il punto di ascissa $x = 0$ e per

$$-x^3 - 6x + 4 = 0$$

Risolvendo mediante l'uso del metodo grafico otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -6x + 4 \end{cases}$$



Osserviamo che il punto di ascissa $x = \alpha \in [0;1]$ è l'ulteriore punto in cui $f'(x) = 0$

e) Teorema di Lagrange : Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a;b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a;b[$, esiste almeno un punto $x_0 \in]a;b[$ in cui risulta:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le condizioni del teorema non sono soddisfatte perché la funzione non risulta continua in tale intervallo. Osserviamo infatti che:

$$domf =]-\infty; -\sqrt[3]{2}[\cup]-\sqrt[3]{2}; +\infty[$$

e $\quad -\sqrt[3]{2} \in [-\sqrt{2}; 0]$

Il grafico delle due curve k e Γ è il seguente