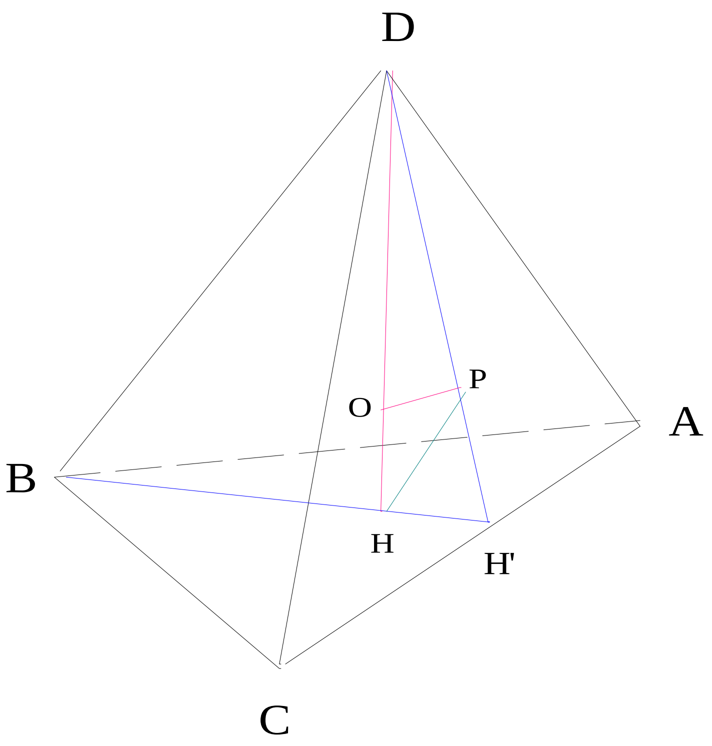
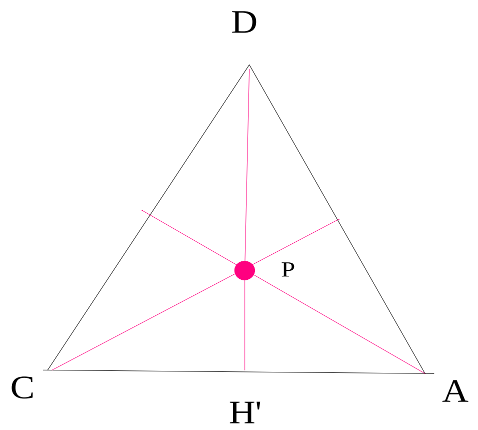
Problema 1

$spigolo = l$





$$DH' = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

a) $A_{faccia} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ $\quad BH' = DH' = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ $\quad HH' = \frac{1}{3}BH' = \frac{l}{6}\sqrt{3}$

Dal triangolo rettangolo DHH' ricaviamo: $DH = \sqrt{DH'^2 - HH'^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{3l^2}{36}} = \sqrt{\frac{2}{3}l^2} = l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Per la similitudine tra $\triangle DOP$ e $\triangle DHH'$ possiamo scrivere: $\frac{DO}{OP} = \frac{DH'}{HH'}$

$\frac{DH - OH}{OP} = \frac{DH'}{HH'}$ e, sostituendo, si ha:

$$\frac{l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - r}{r} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{6}\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - r = 3r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l}{2\sqrt{6}}$$

essendo $V = \frac{1}{3}A_b h$ si ha $V = \frac{1}{3}\frac{l^2}{4}\sqrt{3}\, l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}l^3\sqrt{2}$

Inoltre, $S = 4\frac{l^2}{4}\sqrt{3} = l^2\sqrt{3}$

Per cui, otteniamo $V=\frac{1}{12}\cdot l^2\cdot l\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}l^2\sqrt{3}\cdot l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}S\cdot 4r=\frac{1}{3}Sr$

b) $\triangle HPH'$ simile $\triangle H'DB$ perché $BH'=DH'$ $\begin{cases} H'P=\frac{1}{3}DH' \\ HH'=\frac{1}{3}BH' \end{cases} \Rightarrow H'P=HH'$

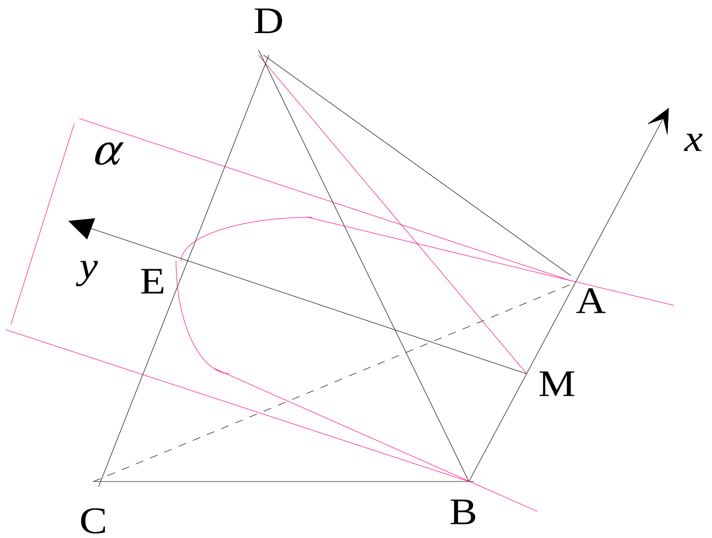
e $\widehat{PH'H}$ in comune

Per cui $\frac{BD}{HP}=\frac{DH'}{PH'}$ $\frac{l}{l'}=\frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{6}\sqrt{3}}=3$

Possiamo quindi affermare che il rapporto fra gli spigoli dei tetraedri, rispettivamente circoscritto ed inscritto alla sfera di centro O e raggio OP, vale 3.

Poiché $\frac{V}{V'}=\frac{l^3}{l'^3}$ $\Rightarrow \frac{V}{V'}=27$

c)



Ponendo $l=s$ $DE=\frac{s}{2}$ e $DM=\frac{s}{2}\sqrt{3}$

Dal triangolo rettangolo DEM ricaviamo: $EM=\sqrt{DM^2-DE^2}=\sqrt{\frac{3}{4}s^2-\frac{1}{4}s^2}=\frac{s}{2}\sqrt{2}$

d) Se assumiamo come assi cartesiani le rette AB ed ME aventi origine in M, avremo:

$M(0;0)$; $A\left(\frac{s}{2};0\right)$, $E\left(0;\frac{s}{2}\sqrt{2}\right)$

Per cui l'equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$ avente vertice in E la possiamo ricavare dal sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=0 \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{s}{2}\sqrt{2} \\ \dfrac{s^2}{4}a+\dfrac{s}{2}b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=\dfrac{s}{2}\sqrt{2} \\ a=-\dfrac{2\sqrt{2}}{s} \end{cases} \Rightarrow \quad y=-\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2+\frac{1}{2}s\sqrt{2}$$

e) L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è data da

$$S=S_{seg\ parab}-S_{\triangle MAE}=\frac{2}{3}MA\cdot ME-\frac{1}{2}MA\cdot ME=\frac{1}{6}MA\cdot ME=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{s}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{24}s^2\sqrt{2}$$

essendo $S=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, otteniamo

$$\frac{1}{24}s^2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3} \quad\Rightarrow\quad s=2\sqrt{2}$$