Problema 1

Punto 1

$f(x) = 2x - 3x^3$

La funzione è una cubica dispari definita in tutto $\mathbb{R}$ e simmetrica rispetto all'origine.

Intersezioni con gli assi

La curva passa per l'origine e interseca l'asse x nei punti

$x = 0 \qquad x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Studio del segno

$2x - 3x^3 > 0$

$x(2 - 3x^2) > 0$

$x > 0$

$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

Quindi

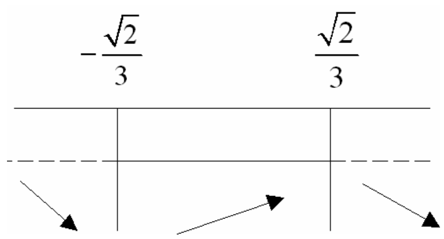
$f(x) > 0$ per $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[\cup \left]0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$

$f(x) < 0$ per $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$

Studio della derivata prima

$f'(x) = 2 - 9x^2$

$f'(x) \geq 0$ per $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$

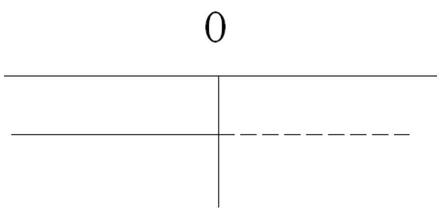


la $f(x)$ ha un minimo per $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ nel punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ ed un massimo nel punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

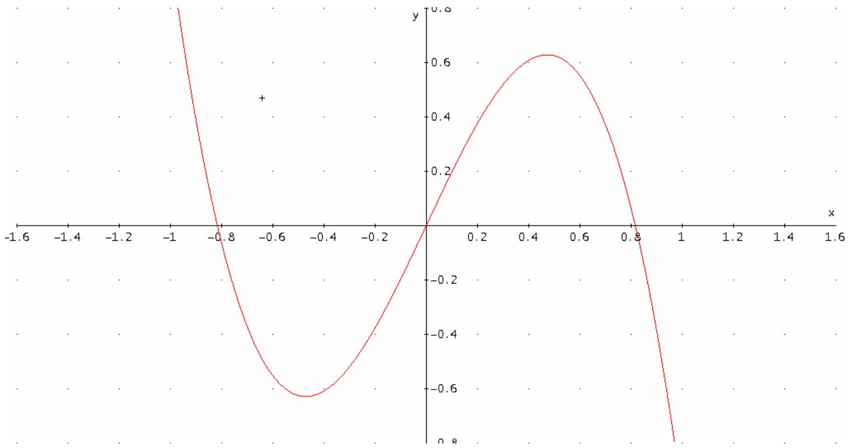
Studio del segno della derivata seconda

$f''(x) = -18x$

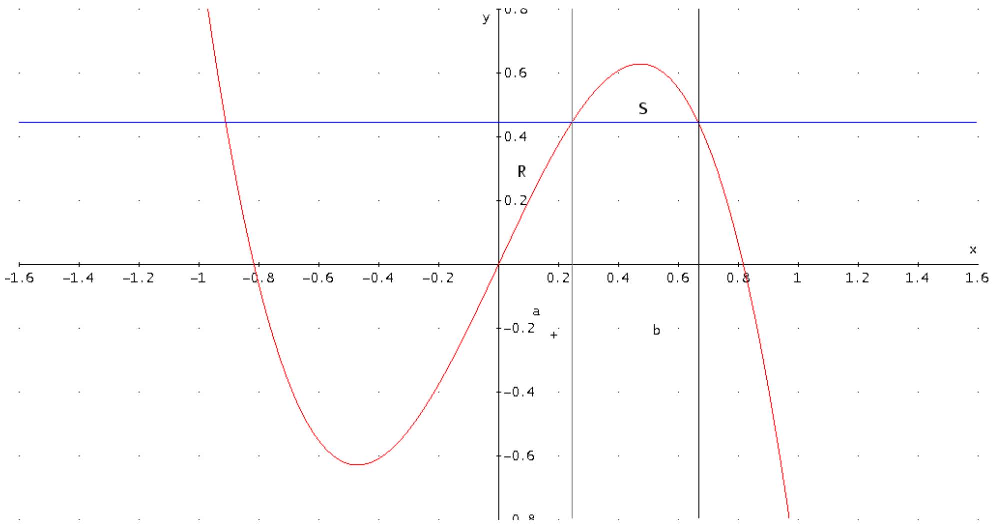
$f''(x) \geq 0$ per $x \leq 0$



ha un flesso nell'origine
Il grafico sarà quindi



Punto 2 – 3



La retta

$y = c$ potrà variare in $\left]0; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right[$

Siano a e b con $a, b > 0$ e $a < b$ le ascisse dei punti di intersezione della cubica con la retta $y = c$.

L'area R sarà data da

$$R = \int_0^a [c - f(x)]dx = \int_0^a (3x^3 - 2x + c)dx$$

L'area S è

$$S = \int_a^b [f(x) - c]dx = \int_a^b (2x - 3x^3 - c)dx$$

Poiché R = S avremo

$$\frac{3a^4}{4} - a^2 + ac = \frac{3a^4}{4} - a^2 + ac - \frac{3b^4}{4} + b^2 - bc$$

Semplificando si ha

$$\frac{b(3b^3 - 4b + 4c)}{4} = 0$$

$b = 0$ non accettabile

si ha quindi

$$3b^3 - 4b + 4c = 0 \qquad (1)$$

poiché $f(b) = c$ avremo

$$c = 2b - 3b^3 \qquad (2)$$

Risolvendo il sistema formato dalle (1) e (2) avremo

$$\begin{cases} 3b^3 - 4b + 4c = 0 \\ c = 2b - 3b^3 \end{cases}$$

$$3b^3 - 4b + 4(2b - 3b^3) = 0$$

$$b(4 - 9b^2) = 0$$

$b = 0$ non accettabile e $b = \pm\frac{2}{3}$

dovendo essere $b > 0$ avremo $b = \frac{2}{3}$

Con semplici calcoli otteniamo $c = \frac{4}{9}$ e quindi $y = \frac{4}{9}$

Per trovare a basta risolvere l'equazione $f(a) = \frac{4}{9}$

$$2a - 3a^3 = \frac{4}{9}$$

$$18a - 27a^3 = 4$$

$$27a^3 - 18a + 4 = 0$$

Mediante il teorema di Ruffini per $x = \frac{2}{3}$ si ha

$$a = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$$

Punto 4

L'equazione della curva simmetrica rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$ sarà

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{8}{9} - y \end{cases}$$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x \to x \\ y \to \frac{8}{9} - y \end{cases}$$

otteniamo la funzione $g(x)$ il cui grafico è simmetrico rispetto alla retta data.

Si ha

$y = 2x - 3x^3$

$\frac{8}{9} - y = 2x - 3x^3$ e quindi

$y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$

Il grafico sarà