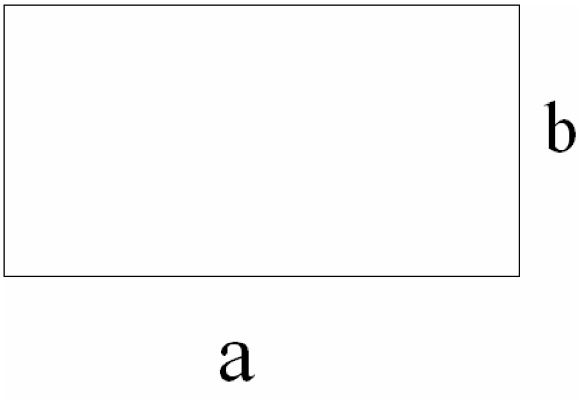
Problema 1



Il perimetro dell'aiuola sarà $2p = \lambda$, quindi, indicando con a e b la base e l'altezza, avremo

$a + b = \frac{\lambda}{2}$ per cui $a = \frac{\lambda}{2} - b$

a) L'area dell'aiuola sarà

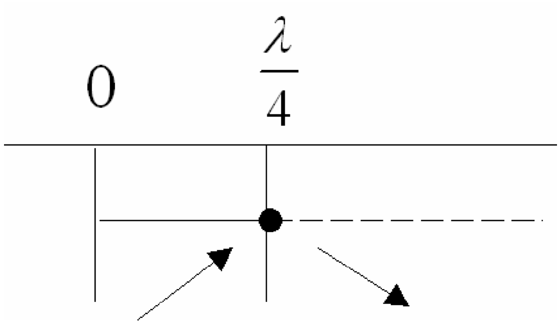
$$A_R = \left(\frac{\lambda}{2} - b\right)b = \frac{\lambda}{2}b - b^2$$

quindi

$$A'(b) = \frac{\lambda}{2} - 2b$$

$A'(b) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2} - 2b \geq 0$ e quindi

$$b \leq \frac{\lambda}{4}$$



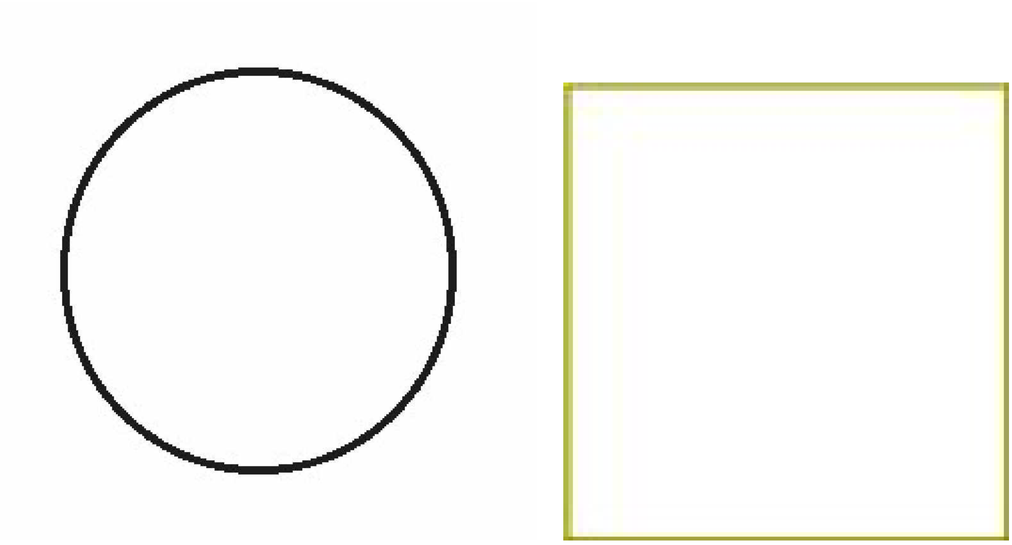
L'area è massima quando $b = \frac{\lambda}{4}$

Avremo quindi

$$a = b = \frac{\lambda}{4}$$

pertanto il rettangolo di area massima è un quadrato

b) Dividiamo il filo in due parti per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare



Indichiamo con x la parte di filo che serve a delimitare l'aiuola circolare e con $\lambda - x$ la parte che serve a delimitare l'aiuola quadrata, avremo:

$r = \dfrac{x}{2\pi}$ lato quadrato = $\dfrac{\lambda - x}{4}$

Le aree saranno

$A_C = \dfrac{x^2}{4\pi}$ $A_Q = \dfrac{(\lambda - x)^2}{16}$

La somma delle due aree sarà

$S(x) = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{(\lambda - x)^2}{16} = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2}{16}$ dove $0 \le x \le \lambda$

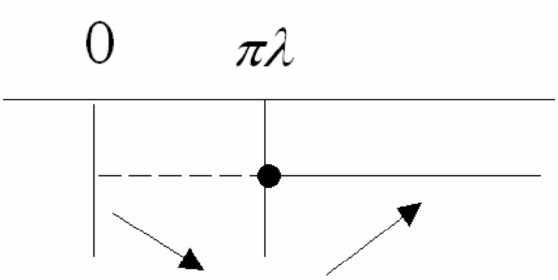
$$S(x) = \frac{4x^2 + \pi x^2 - 2\pi\lambda x + \pi\lambda^2}{16\pi}$$

Derivando avremo

$$S'(x) = \frac{1}{16\pi}(8x + 2\pi x - 2\pi\lambda)$$

$$S'(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + 2\pi x \ge 2\pi\lambda$$

$$x \ge \frac{\pi\lambda}{4+\pi}$$

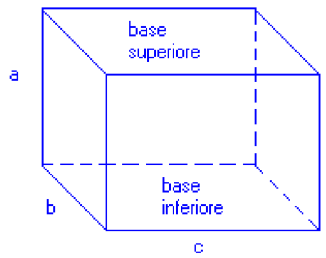


L'area è minima per $x = \dfrac{\pi\lambda}{4+\pi}$

c) L'area è massima per $x = \lambda$ e rappresenta la lunghezza della circonferenza
In tal caso si ha:

$$S(\lambda) = \frac{4\lambda^2 + \pi\lambda^2 - 2\pi\lambda^2 + \pi\lambda^2}{16\pi} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

d)Se l'aiuola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo, indicando con a, b, c le dimensioni del parallelepipedo avremo



$$V = abc$$

aumentando del 10% ciascuna dimensione avremo

$$V' = (a + 0,1a)(b + 0,1b)(c + 0,1c) = abc(1,1)^3$$

$$V' = 1,331abc$$

Il volume del terreno in più sarà

$$V' - V = 1,331abc - abc = 0,331abc$$

L'aumento percentuale sarà

$$\frac{V' - V}{V} 100 = 33,1\%$$