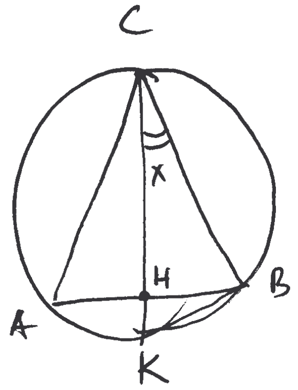
PROBLEMA 2



1. Si ponga l'angolo al vertice del triangolo pari a $2x$.

Si avrà che

$$\overline{BC} = 2r \cos x$$

dove $2r$ è il diametro del cerchio, dato che il triangolo BCK è rettangolo.

L'altezza del triangolo sarà

$$\overline{CH} = \overline{BC} \cos x = 2r \cos^2 x$$

dato che anche BCH è rettangolo.

La base sarà

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BH} \quad \text{con}$$

$$\overline{BH} = \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} x = 2r \cos x \cdot \operatorname{sen} x$$

L'Area del triangolo sarà

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (4r \operatorname{sen} x \cos x) \cdot (2r \cos^2 x) =$$

$$= 4r^2 \operatorname{sen} x \cos^3 x$$

L'angolo per cui l'area sarà massima si ottiene imponendo che

$$\frac{dA(x)}{dx} = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A'(x) = 4r^2 \left[\cos^4 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\right] =$$

$$A'(x) = 0$$

$$4r^2 \cos^2 x \left[\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x\right] = 0$$

- $\cos x = 0$

  $x = \frac{\pi}{2}$ (soluz. non accettabile)

- $\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \qquad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$$

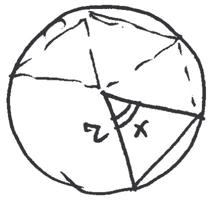
$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\operatorname{tg} x \text{ negative non accettabile})$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Il triangolo con area massima ha angolo al vertice $\alpha = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, e quindi è equilatero.

PROBLEMA 2

2. Si dimostri che S_n vale $\frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$;



L'area del poligono regolare inscritto si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo mostrato.

Si osservi che l'angolo al vertice di questo triangolo (isoscele) è pari all'angolo giro diviso per n (numero dei lati)

$$x = \frac{2\pi}{n} \quad \text{radianti}$$

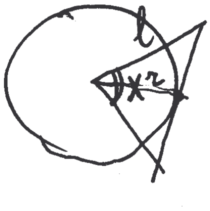
L'area del ~~triangolo~~ triangolo suddetto è

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

L'area del poligono vale

$$S_n = n \cdot A_1 = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

- Si ricavi una formula analoga per l'area del poligono circoscritto.



Sia l il lato obliquo.
La relazione fra l e r è

$$r = l \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad l = \frac{r}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

dove $x = \frac{2\pi}{n}$ come nel caso precedente la base del triangolo sarà pari a

$2 \cdot l \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e quindi l'area del triangolo sarà

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 l \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) \cdot r$$

Sostituendo la relazione fra r e l e moltiplicando per n ovvero l'area del poligono cercato:

$$S_n^c = n \cdot r \cdot l \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} = n r^2 \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)} =$$

$$= n r^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

PROBLEMA 2.

3. Si calcoli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n r^2}{2} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

Si ponga $x = \frac{2\pi}{n}$ e si osservi che se $n \to \infty$ $x \to 0$ - Allora

$$\lim_{x \to 0} \pi r^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = \pi r^2$$

Se n tende a ∞ si ottiene l'area del cerchio.

PROBLEMA 2.

4. Il problema della quadratura del cerchio è uno dei problemi classici dell'antichità, assieme a quello della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo.
Nessuno di questi è risolubile con le tecniche della geometria (utilizzando costruzioni che richiedano soltanto la riga e il compasso).
La soluzione di questo problema è stata affrontata da Archimede con il metodo di esaustione, che consiste nel confrontare l'area del poligono circoscritto di n lati e quella del poligono inscritto, e stabilire che tendono allo stesso valore.

Archimede però non fu in grado di generalizzare questo risultato. Anzi, fu costretto a calcolarlo solo in maniera approssimata, utilizzando poligoni con un grande numero di lati (ma non infiniti).
Si noti che risolvere correttamente questo problema equivale a calcolare π con numerose cifre decimali. Solo con l'analisi matematica è diventato possibile risolvere problemi di questa natura.