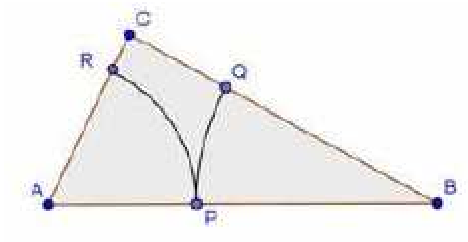


Punto 1

Indichiamo con x il segmento PB, avremo

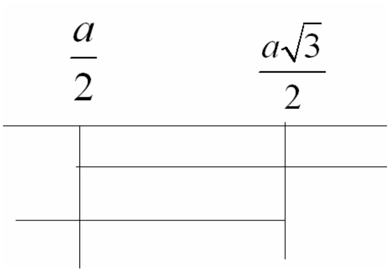
$AP = a - x$

I cateti del triangolo saranno

$AC = \frac{a}{2}$ $\qquad$ $BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Inoltre dovrà essere

$$BC = \begin{cases} a - x < \frac{a}{2} & \Rightarrow \quad x > \frac{a}{2} \\ x < \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ per cui



Quindi

$$\frac{a}{2} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Punto 2

L'area del triangolo ABC sarà

$$S = \frac{a}{2} \bullet \frac{a\sqrt{3}}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Essendo l'area del settore circolare $A = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ avremo , indicando con S_1 l'area del settore APR

$$S_1 = \frac{1}{2}(a - x)^2 \frac{\pi}{3}$$

L'area del settore BPQ sarà

$$S_2 = \frac{1}{2}x^2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}x^2$$

L'area del quadrilatero mistilineo PQCR sarà

$A = S - S_1 - S_2$ e quindi

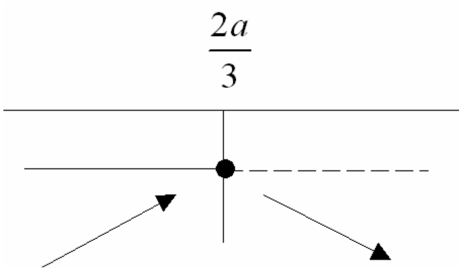
$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6}(a-x)^2\pi - \frac{\pi}{12}x^2 \quad \text{avremo}$$

$$A' = \frac{\pi}{3}(a-x) - \frac{\pi}{6}x$$

$$A' = \frac{2\pi a - 2\pi x - \pi x}{6} \quad \text{si ha}$$

$$2a - 3x \geq 0$$

$$x \leq \frac{2a}{3}$$



Si ha un massimo per $x = \frac{2a}{3}$

Per $x = \frac{a}{2}$ **avremo**

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi\left(a - \frac{a}{2}\right)^{2-}}{6} - \frac{\pi}{12}\frac{a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{16}\pi a^2$$

Per $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ **avremo**

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi\left(a - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}{6} - \frac{\pi}{12}\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \pi\frac{(2a - a\sqrt{3})^2}{24} - \frac{\pi a^2}{16} =$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right)}{24} - \frac{\pi a^2}{16} = a^2\frac{6\sqrt{3} - 17\pi + 8\sqrt{3}\pi}{48}$$

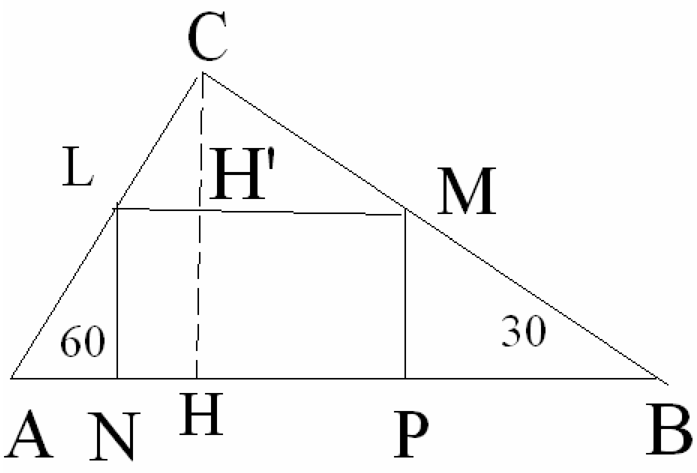
Per $x = \frac{2}{3}a$ **avremo**

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\left(a - \frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{\pi}{12}\frac{4a^2}{9} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\frac{\left(3a - 2a\right)^2}{9} - \frac{\pi a^2}{27}$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{18} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18}\right)$$

Il minimo si ha per $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ mentre il massimo per $x = \frac{2a}{3}$

Punto 3



L'altezza del triangolo ABC sarà

$$CH = AC \sin 60 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Dalla similitudine dei triangoli ABC e CLM, ponendo $CH' = y$, avremo

$AB : LM = CH : CH'$ e quindi

$$LM = \frac{ay}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{4y}{\sqrt{3}}$$

Inoltre

$$HH' = CH - CH' = \frac{a\sqrt{3}}{4} - y$$

L'area del rettangolo sarà

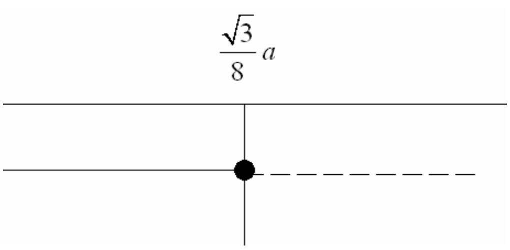
$$S = LM \bullet HH' = \frac{4y}{\sqrt{3}}\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} - y\right)$$

$$S = ay - \frac{4y^2}{\sqrt{3}}$$ avremo

$$S' = a - \frac{8y}{\sqrt{3}} \geq 0$$

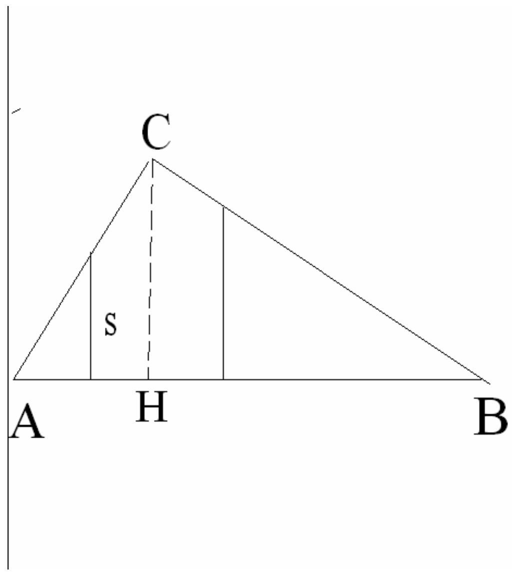
$$\sqrt{3}a - 8y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 8y - \sqrt{3}a \leq 0$$

$$y \leq \frac{\sqrt{3}}{8}a$$



Si ha un massimo per $CH' = \frac{\sqrt{3}}{8}a$

Punto 4



Il solido sarà formato da due piramidi la cui sezione è un quadrato, indicando con x la distanza da A, avremo

$$AH = AC\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{4}$$

Per la prima sezione avremo

$$0 \le x \le \frac{a}{4}$$

Mentre per la seconda avremo

$$\frac{a}{4} \le x \le a$$

Essendo nel primo caso

$$s = x\,\mathrm{tg}\,60° = l\sqrt{3}$$

E nel secondo

$$s = (a-x)\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{a-x}{\sqrt{3}}$$

Il volume sarà

$$V = \int_0^{\frac{a}{4}} \left(\sqrt{3}x\right)^2 dx + \int_{\frac{a}{4}}^{a} \left(\frac{a-x}{\sqrt{3}}\right)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{4}} - \frac{1}{3}\left[\frac{(a-x)^3}{3}\right]_{\frac{a}{4}}^{a} =$$

$$= \frac{a^3}{64} + \frac{1}{9}\frac{27a^3}{64} = \frac{a^3}{64} + \frac{3a^3}{64} = \frac{4a^3}{64} = \frac{1}{16}a^3$$