Problema 1

Si considerino le funzioni f e g definite per tutti gli x reali da

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin \pi x$$

Punto 1

Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g

Studio della funzione $f(x) = x^3 - 4x$

Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$

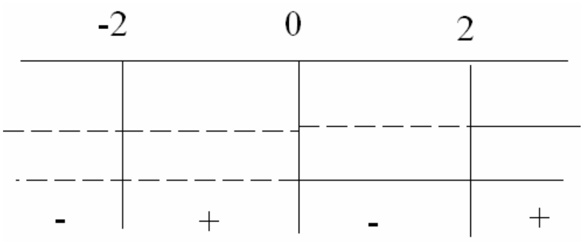
La funzione è dispari per cui è simmetrica rispetto all'origine

Interseca gli assi nei punti $(-2;0)$ $(0;0)$ $(2;0)$

Studio del segno

$x^3 - 4x > 0$

$x(x^2 - 4) > 0 \qquad x > 0 \quad \text{e} \quad x < -2 \;\vee\; x > 2$

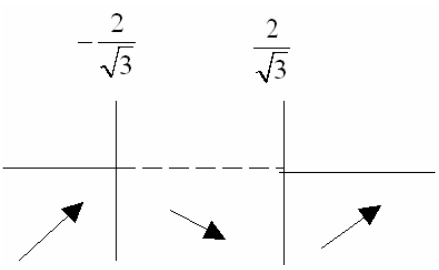


$y > 0$ per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$

$y < 0$ per $x < -2$ e per $0 < x < 2$

studio della derivata prima

$f'(x) = 3x^2 - 4 \geq 0$ si ha $x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$



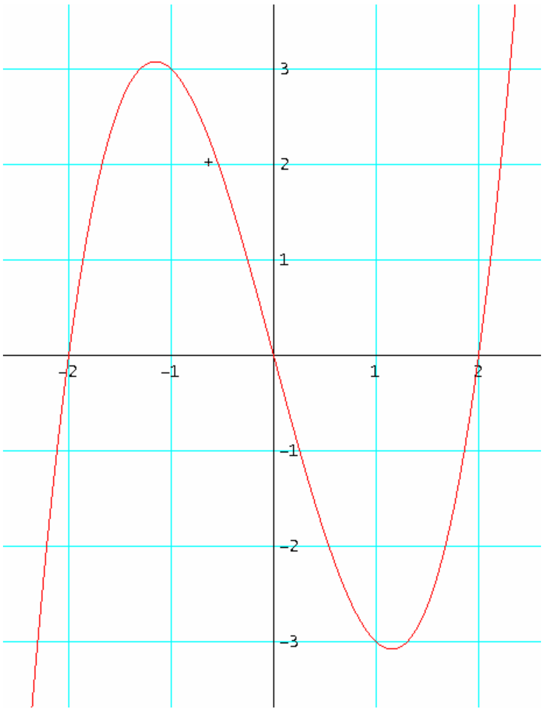
Si ha un punto di massimo in $M\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$ e un minimo in $m\left(\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

Studio derivata seconda

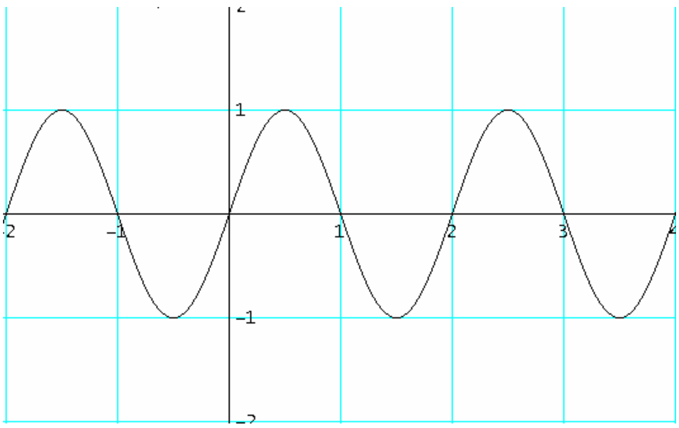
$f''(x)=6x\geq 0$

Si ha un flesso nell'origine

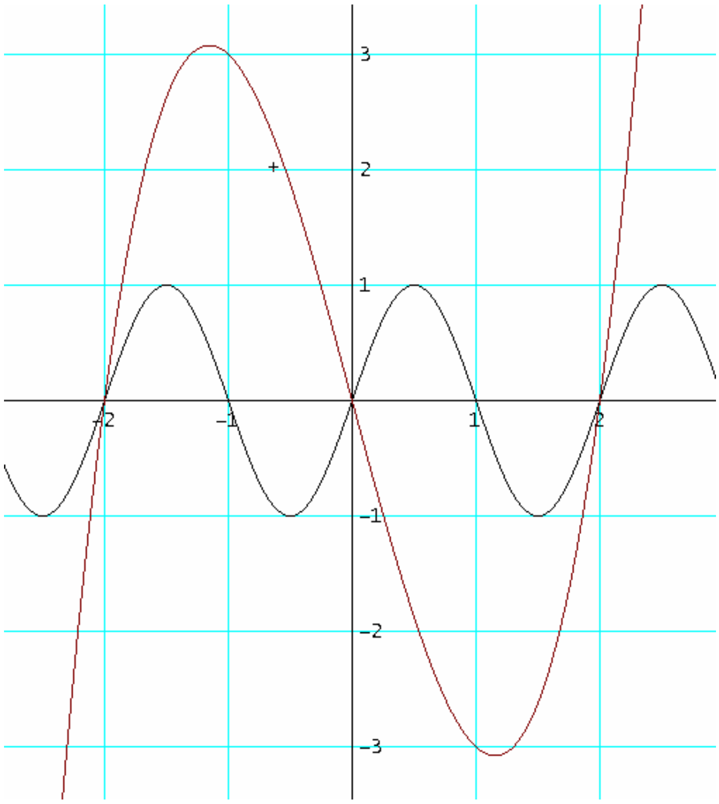
Il grafico sarà



La funzione $g(x)=\sin\pi x$ è una sinusoide avente periodo T = 2 il grafico è



Avremo pertanto



Punto 2

Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y=-3$. Successivamente si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6;6]$ e se ne indichino le coordinate

Le intersezioni fra G_f e $y=-3$ si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} y=x^3-4x \\ y=-3 \end{cases}$ si ha

$$x^3-4x+3=0$$
$$(x-1)(x^2+x-3)=0$$
$$x=1 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Avremo i punti $(1;-3)$ $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-3\right)$ $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2};-3\right)$

i punti di G_g a tangente orizzontale si ottengono da

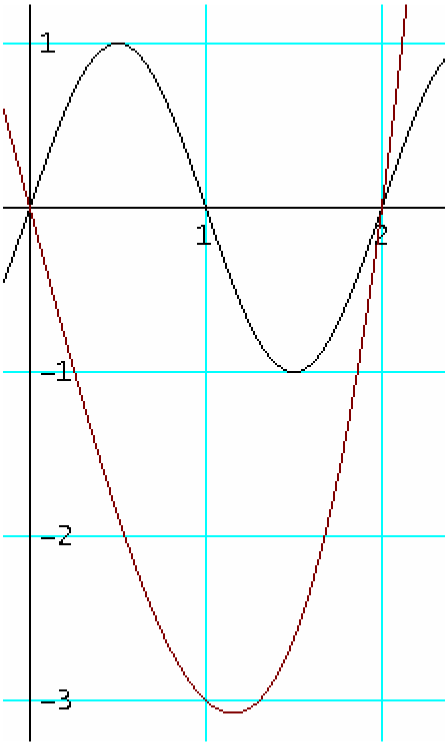
$$g'(x)=\pi\cos\pi x=0$$
$$\cos\pi x=0 \qquad \pi x=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad x=\frac{1}{2}+k$$

Si ha $-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},-\frac{9}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2}$

Punto 3

Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $\left[0;2\right]$. si calcoli l'area di R

Avremo



$$R=\int_0^2\left[\sin\pi x-(x^3-4x)\right]dx=\int_0^2(x^3-4x)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]=4=$$

Punto 4

La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x)=3-x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

Si ha

$$V=\int_0^2\left[\sin\pi x-(x^3-4x)\right](3-x)dx=\int_0^2(3\sin\pi x-x\sin\pi x-3x^3+12x+x^4-4x^2)dx=$$

Integrando per parti $\int x\sin\pi x dx=-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x$ avremo

$$V=\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}=8{,}370m^3=8370\,litri$$