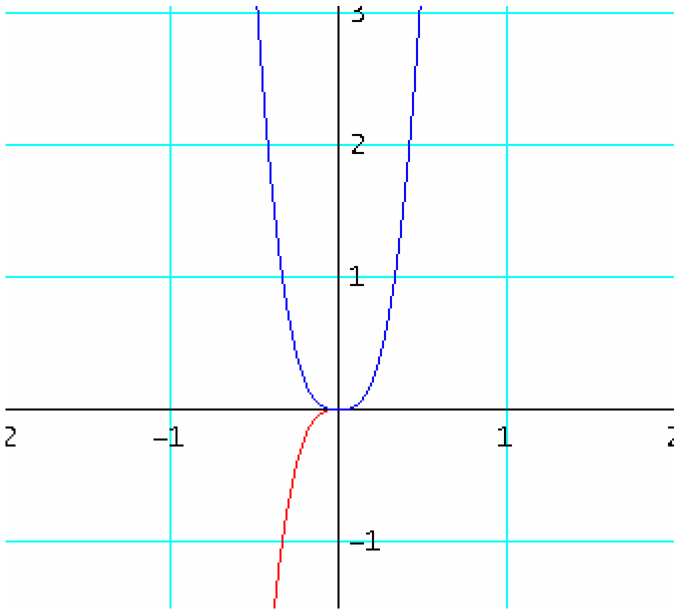
Punto 1

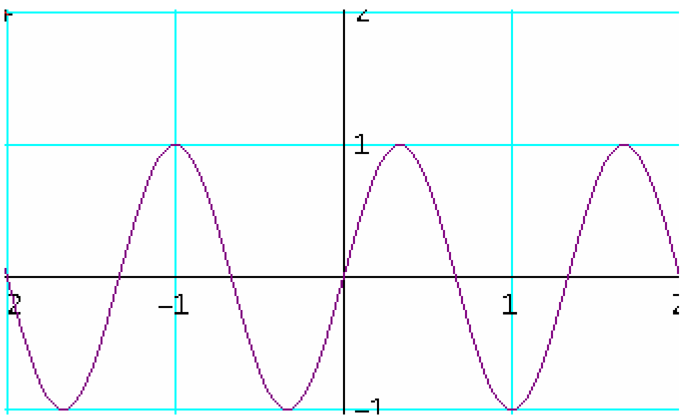
$f(x) = |27x^3|$ $\qquad$ $g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$

Il periodo della funzione $g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$ è $T = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4}{3}$

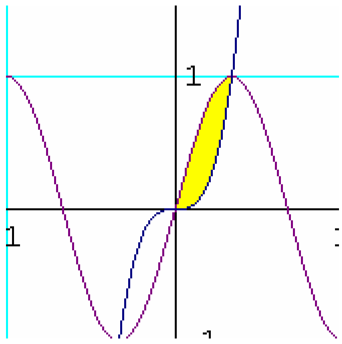
La funzione $f(x) = 27x^3$ rappresenta una cubica, per cui il grafico della $f(x) = |27x^3|$ si ottiena ruotando attorno all'asse x la parte negativa del grafico.



Il grafico della funzione $g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$ sarà



I due grafici saranno



Punto 2

Per $x=\frac{1}{3}$ si ha $y=1$ che è l'equazione della retta tangente alla curva $g(x)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$.

Inoltre $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$

$f'(x)=81x^2$ si ha $f'\left(\frac{1}{3}\right)=9$

La retta tangente alla curva $f(x)=27x^3$ sarà

$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)$ cioè

$y=9x-2$

Poiché la tangente alla g(x) è orizzontale, l'angolo formato dalle due tangenti risulta uguale all'angolo che l'asse x forma con la tangente alla f(x). Quindi avremo

$\operatorname{tg}\alpha=9$

$\alpha=arc\operatorname{tg}9=83°39'$

Punto 3

L'area formata dalle due curve sarà

$$S=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sin\frac{3}{2}\pi x-27x^3\right)dx$$

Essendo

$\int\sin\frac{3}{2}\pi x dx=\frac{2}{3\pi}\int\frac{3}{2}\pi\sin\frac{3}{2}\pi x dx=-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3}{2}\pi x$ avremo

$$S=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3}{2}\pi x-\frac{27}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{12}+\frac{2}{3\pi}=\frac{8-\pi}{12\pi}$$

Punto 4

Facendo ruotare la regione attorno all'asse x il volume sarà

$$V(S) = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\sin^2 \frac{3}{2}\pi x - 729x^6 \right) dx$$

Facendo ruotare la regione attorno all'asse y

da $y = 27x^3$ si ha $x = \sqrt[3]{\dfrac{y}{27}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{y}$

da $y = \sin\left(\dfrac{2}{3}\pi x\right)$ si ha $\dfrac{3}{2}\pi x = \arcsin y$ e quindi $x = \dfrac{2\arcsin y}{3\pi}$

il volume sarà

$$V(T) = \pi \int_0^1 \left[\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{3} \right)^2 - \left(\frac{2arc\sin y}{3\pi} \right)^2 \right] dy$$