Problema n° 1

$$f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt \qquad \text{in } [0;9]$$

punto 1

Per il teorema di Torricelli

$$f'(x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \qquad \text{per cui}$$

$$f'(\pi)=\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

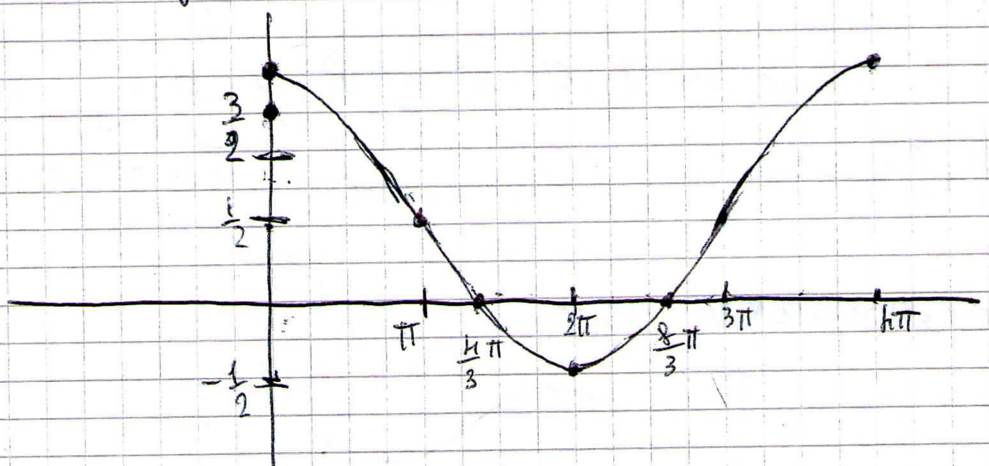
$$f'(2\pi)=\cos\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Punto 2

$$f'(x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

Il grafico di $f'(x)$ si può dedurre dal grafico della funzione $y=\cos x$ con una dilatazione di fattore 2 rispetto all'asse x e una traslazione di vettore $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Per cui il grafico sarà



Nei punti in cui la funzione (mostrata nel grafico) interseca l'asse x vi saranno i massimi e minimi richiesti

$$\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2}=\frac{2}{3}\pi \quad e \quad \frac{x}{2}=\frac{4}{3}\pi$$

$$x=\frac{4}{3}\pi \quad e \quad x=\frac{8}{3}\pi$$

per $x=\frac{4}{3}\pi$ si ha un massimo perchè $f'(x)$ è positiva per $x<\frac{4}{3}\pi$ e negativa per $x>\frac{4}{3}\pi$

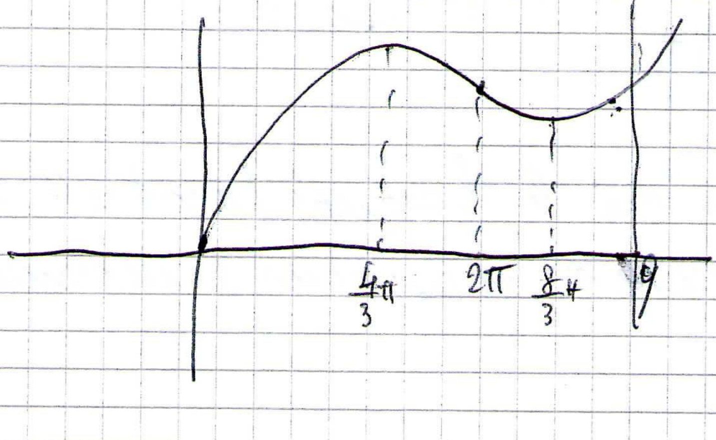
per $x=\frac{8}{3}\pi$ si ha un minimo perchè $f'(x)$ è negativa per $x<\frac{8}{3}\pi$ e positiva per $x>\frac{8}{3}\pi$

Nel punto di minimo della $f'(x)$ la funzione presenta un punto di flesso cioè per $x=2\pi$

$f(0)=0$.

la funzione è crescente nell'intervallo $\left[0;\frac{4}{3}\pi\right]$ e nell'intervallo $\left[\frac{8}{3}\pi;9\right]$ e decrescente in $\left[\frac{4}{3}\pi;\frac{8}{3}\pi\right]$

Il grafico approssimativo sarà



punto 3

Il valore medio di $f'(x)$ sarà

$$f_M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}$$

punto 4.

$$V = \int_0^4 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\Big]dx = \frac{12}{\pi}\int_0^4\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}x\right)dx =$$

$$= -\frac{12}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{4}\right]_0^4 = -\frac{12}{\pi}\left(\cos\pi-\cos 0\right) = \frac{24}{\pi}$$