La funzione $f(x)$ sarà

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}$$

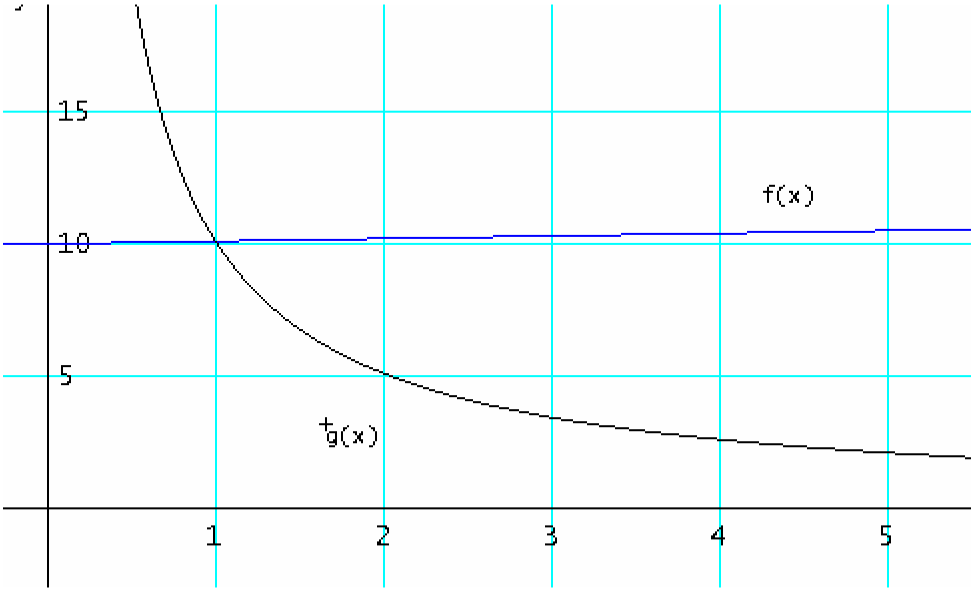
Il costo medio al minuto è

$$g(x) = + \frac{100 + x}{10x}$$

Punto1

Individua l'espressine analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente, verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano

La f è una retta e rappresenta il costo nel mese ed aumentando i minuti di conversazione aumenta il costo mentre la g è una iperbole equilatera traslata e non possiede né massimi né minimi. Essendo un costo medio diminuisce all'aumentare dei minuti perché il costo fisso si suddivide su un numero sempre maggiore sui minuti
I grafici saranno



Punto 2

Avremo

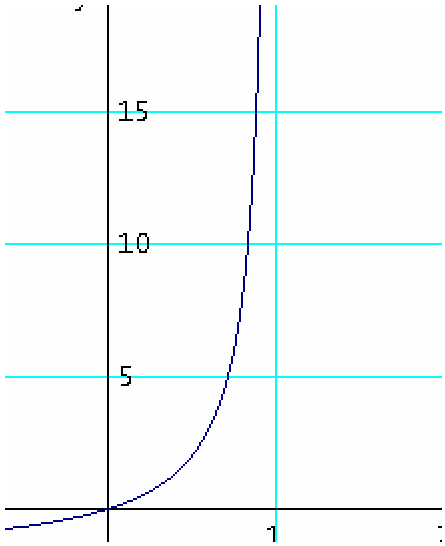
$$g(x_1) = \frac{1}{2} g(x_0) = \frac{1}{2} \frac{100 + x_0}{10x_0}$$

Quindi avremo

$$\frac{100 + x_1}{10x_1} = \frac{100 + x_0}{20x_0}$$

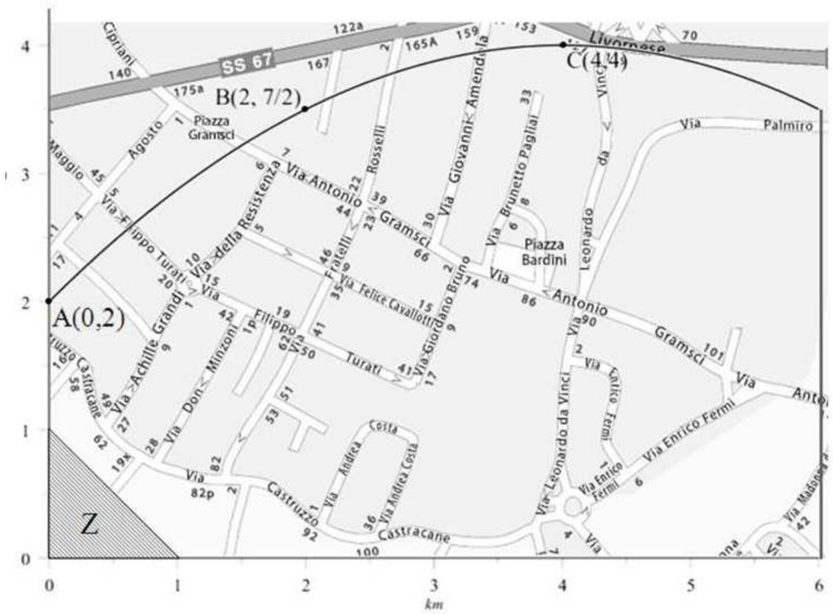
Con facili calcoli otteniamo

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$



Che ha significato per $0 \le x_0 < 100$ e rappresenta un limite dovuto al fatto che siccome il costo per minuto non può scendere al di sotto di 0,1 euro, non è possibile dimezzarlo sempre

Punto 3



La parabola ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponendo il passaggio per i punti A, B, C avremo

$$\begin{cases} c = 2 \\ 7 = 8a + 4b + 4 \\ 2 = 16a + 4b = 2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Otteniamo

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$$

L'area coperta dal segnale è l'area sottesa dalla parabola alla quale bisogna sottrarre l'area della zona Z
Avremo

$$A-Z=\int_0^6\left(-\frac{1}{8}x^2+x+2\right)dx-\frac{1}{2}$$

$$A-Z=\left[-\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^6-\frac{1}{2}$$

$$A-Z=21-\frac{1}{2}=\frac{41}{2}$$

La percentuale coperta da l segnale sarà

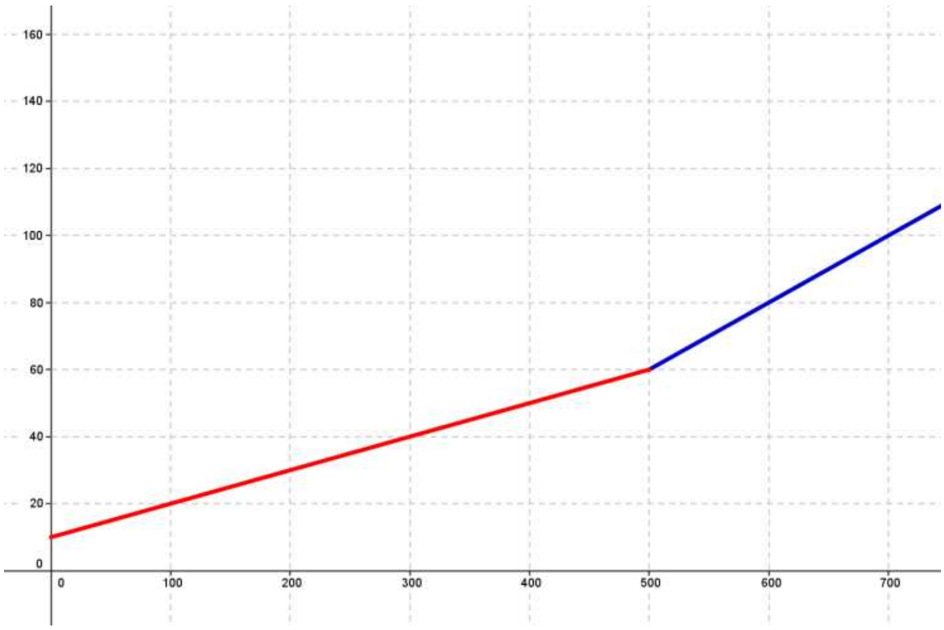
$$\frac{A-Z}{A}=\frac{41}{2}\frac{1}{21}=\frac{41}{42}=97,6\%$$

Punto 4

La funzione $f(x)$ sarà

$$f(x)=\begin{cases}10+\dfrac{x}{10} & per \quad 0\le x\le 500\\[2ex] 10+\dfrac{x}{10}+\dfrac{x-500}{10} & per \quad x>500\end{cases} \quad = \quad f(x)=\begin{cases}10+\dfrac{x}{10} & per \quad 0\le x\le 500\\[2ex] -40+\dfrac{x}{5} & per \quad 0\le x\le 500\end{cases}$$

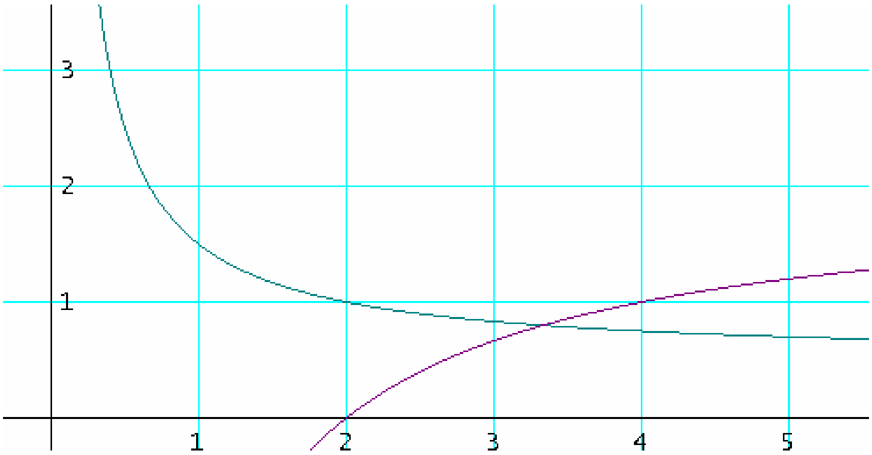
Il grafico sarà



La funzione $g(x)$ sarà

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{10} & per \quad 0<x\le 500\\[2ex] -\dfrac{40}{x}+\dfrac{1}{5} & per \quad x>500\end{cases}$$

Il grafico sarà



La $f(x)$ è continua in R e risulta non derivabile per $x = 500$ perché in esso si ha un punto angoloso, il minimo si ha per $x = 0$

La $g(x)$ è continua per $x \neq 0$ e derivabile per $x \neq 500$ ove esiste un punto angoloso
Si ha

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & per \quad 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & per \quad 0 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

La funzione non è continua per $x = 500$ in esso avremo un punto di minimo assoluto
Inoltre

$$g(500) = \frac{10}{500} + \frac{1}{10} = 0{,}12$$ cioè 12 centesimi al minuto