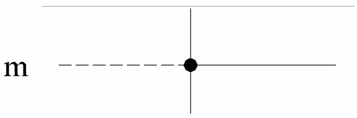
Problema 2

$$y=\frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$$



si ha quindi

$$y=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+m-m} & \text{per } m\le 0\\[2ex] \dfrac{2x+1}{x^2+2m} & \text{per } m>0\end{cases}$$

il dominio pertanto sarà $\text{dom } f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

a) la funzione è pertanto derivabile in tutti i punti del duo dominio.

b) avremo

$$y'=\begin{cases}\dfrac{2x^2-2x(2x+1)}{x^4} & m\le 0\\[2ex] \dfrac{2(x^2-2m)-2x(x+1)}{(x^2+2m)^2} & m>0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}-\dfrac{2x^2-2x}{x^4} & m\le 0\\[2ex] \dfrac{-2x^2-2x+4m}{(x^2+2m)^2} & m>0\end{cases}$$

Si ha

$$f'(1)=\frac{-2-2+4m}{(1+2m)^2}\quad\Rightarrow\quad m=1$$

c) per $m=1$ la funzione diviene

$$y=\frac{2x+1}{x^2+2}$$

$\text{dom } f=\left]-\infty;+\infty\right[$

le intersezioni con gli assi sono:

$$\left(-\frac{1}{2};0\right)\ \text{ e }\ \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

- Studio del segno

$$\frac{2x+1}{x^2+2}>0\quad\Rightarrow\quad f(x)>0\ \text{ per }\ x>-\frac{1}{2}$$

- Condizioni agli estremi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}=0$$

la retta $y=0$ è l'asintoto orizzontale

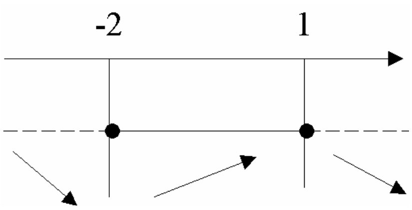
- Studio della derivata prima

$$y' = \frac{2(x^2+2) - 2x(2x+1)}{(x^2+2)^2}$$

$$y' = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}$$

$y' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 \leq 0$ e quindi

$-2 \leq x \leq 1$



Si ha $\quad f(-2) = -\frac{1}{2} \qquad f(1) = 1$

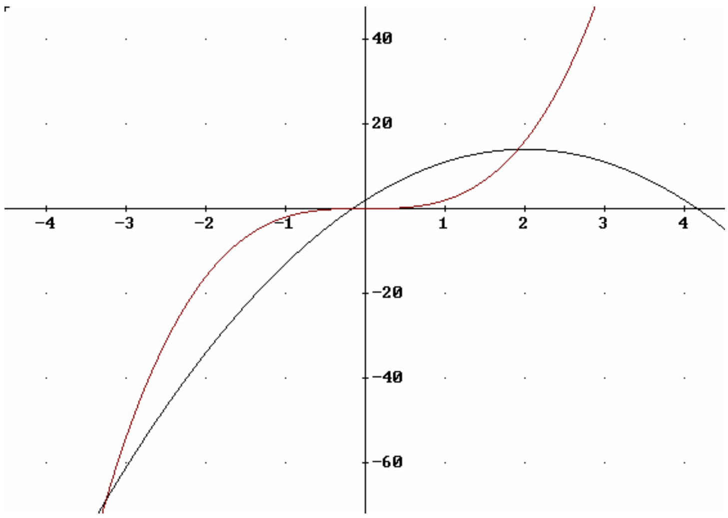
- Studio della derivata seconda

$$y'' = -2\frac{(2x+1)(x^2+2)^2 - 2(x^2+2)2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^4}$$

$$y'' = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3}$$

determiniamo i flessi con il metodo grafico. Posto $y = 2x^3$ otteniamo il sistema

$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = -3x^2 + 12x + 2 \end{cases}$ da cui discende il grafico

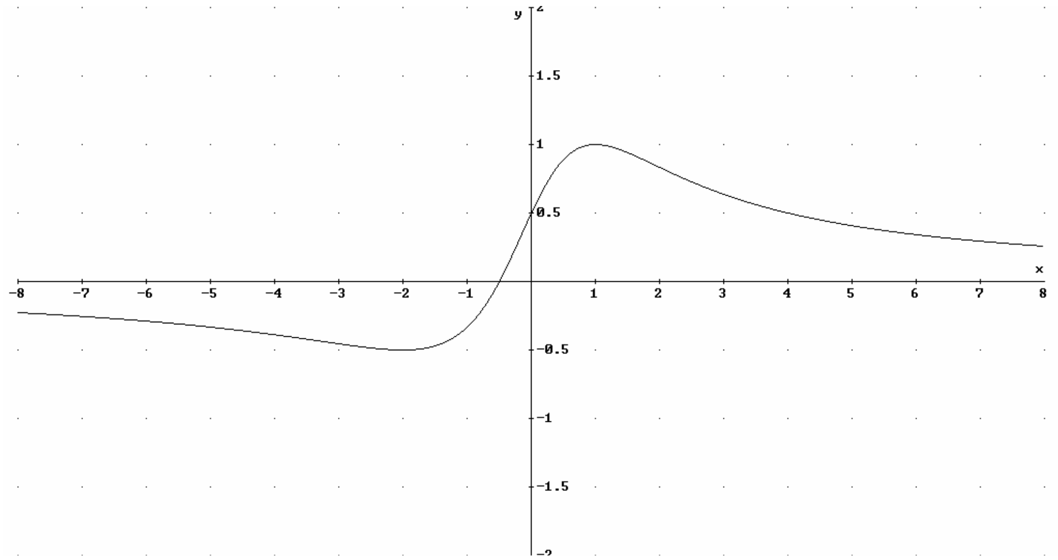


da cui si deduce che la funzione possiede tre flessi per

$-4 < x < -2; \quad -1 < x < 0; \quad 1 < x < 2$

Ricordiamo inoltre che una cubica può avere al più tre radici reali oppure una radice reale e due complesse coniugate. Nel nostro caso, come confermato dal grafico, ci sono tre soluzioni reali e quindi tre flessi.

Il grafico della funzione è



d) l'area richiesta è data da

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x+1}{x^2+2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2+2}dx=\left[\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\,ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$S=\ln\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,ar\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$