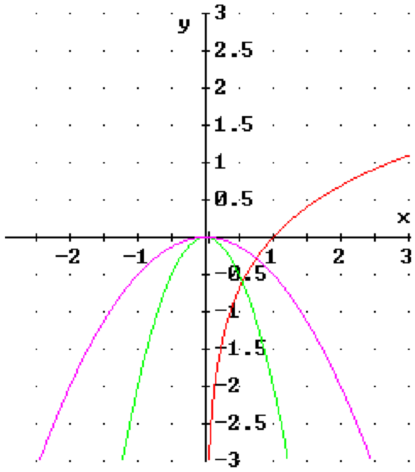
Punto 1)

Come possiamo osservare dal grafico, $f(x)$ e $g(x)$ hanno un punto in comune per $a \le 0$.

L'equazione $\ln x = a\,x^2$ (1) ha quindi una sola soluzione



Per stabilire cosa accade per $a > 0$ consideriamo la condizione di tangenza. Dovendo essere $f\,'(x) = g\,'(x)$ risolviamo l'equazione $\frac{1}{x} = 2ax$ nell'insieme $\mathbb{R}_0^+$ e otteniamo $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Ponendo tale valore nella (1) otteniamo:

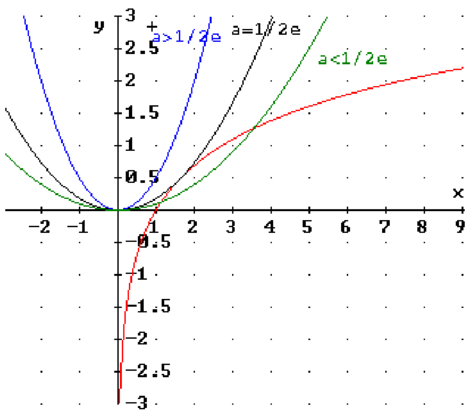
$$\ln\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2a}} = e^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2e}$$

Nel punto $x = \frac{1}{2e}$ le curve risultano tangenti tra loro.

Da tale risultato possiamo trarre le seguenti conclusioni:

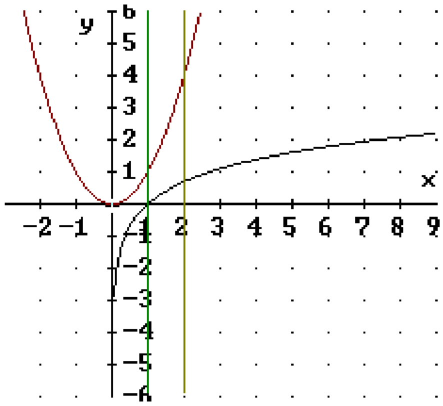
a) se $0 < a < \frac{1}{2e}$ l'equazione ha due soluzioni;

b) se $a > \frac{1}{2e}$ l'equazione non ha soluzioni



Punto 2)

Ponendo $a = 1 > \frac{1}{2e}$ l'area richiesta dal problema e indicata in figura è data da:



$$\int_1^2 (x^2 - \ln x)dx = \left| \frac{x^3}{3} - x\ln x + x \right|_1^2 = \frac{10}{3} - \ln 4$$

Punto 3)

Studio della funzione $h(x) = \ln x - ax^2 \quad \left(con \quad a > \frac{1}{2e} \right)$

-Dominio: $D = \mathbb{R}_0^+$

-Segno: Essendo $\ln x < ax^2$ la funzione è sempre negativa e non interseca l'asse x.

-Comportamento agli estremi dell'insieme di esistenza:

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ quindi $x = 0$ è asintoto verticale destro della funzione.

$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - ax^2 \right) = \infty - \infty$

poiché ax^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\ln x$ il limite tende a $-\infty$. Pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali. Non ha asintoti obliqui, infatti:

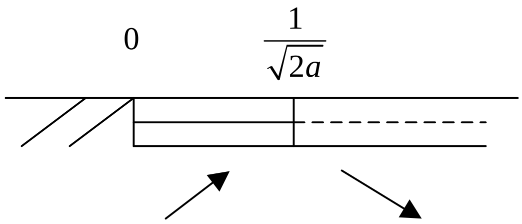
$$m = \lim_{x \to +\infty} h'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 2ax \right) = -\infty$$

-Ricerca dei punti di massimo e minimo:

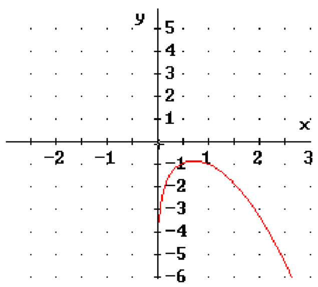
$$h'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - 2ax^2}{x} \geq 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$x > 0$$



la funzione ha un punto di massimo in $P\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} ; -\ln\sqrt{2a} - \frac{1}{2} \right)$



Il grafico approssimativo della funzione $h(x) \quad con \quad a = 1$ è indicato nella figura accanto.