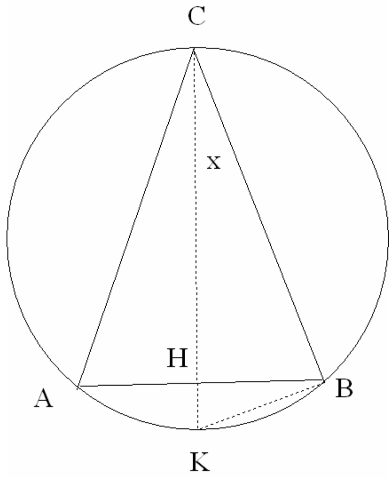
Problema 2

1)



Indichiamo con $2x$ l'angolo al vertice del triangolo
Avremo

$BC = 2r\cos x$

Dove $2r$ è il diametro del cerchio
L'altezza del triangolo sarà

$CH = BC\cos x = 2r\cos^2 x$ essendo rettangolo il triangolo BCH

La base sarà

AB = 2 BH con $BH = BC\sin x = 2r\cos x\sin x$

L'area del triangolo sarà

$$A(x) = \frac{1}{2}(4r\sin x\cos x)(2r\cos^2 x) = 4r^2\sin x\cos^3 x$$

L'angolo per cui l'area sarà massima si ottiene imponendo

$\frac{dA(x)}{dx} \geq 0$ con la limitazione $0 < x < \frac{\pi}{2}$ avremo

$$A'(x) = 4r^2(\cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x) = 4r^2\cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$$

$$\cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) \geq 0$$

Essendo $\cos^2 x$ sempre positivo avremo

$\cos^2 x - 3\sin^2 x \geq 0$ e quindi

$1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x \geq 0$

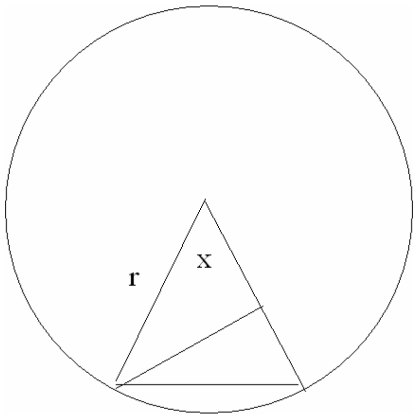
$1 - 4\sin^2 x \geq 0$

$4\sin^2 x - 1 \leq 0$ $\sin x = \pm\frac{1}{2}$

Si ha quindi un massimo per $x = \frac{\pi}{6}$

Il triangolo avrà area massima per $\alpha = 2x = \frac{\pi}{3}$ pertanto sarà equilatero

2) si dimostri che S_n vale $n\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$



L'area del poligono regolare inscritto si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo in figura
Osserviamo che l'angolo al vertice del triangolo isoscele è uguale all'angolo giro diviso per n (numero dei lati)

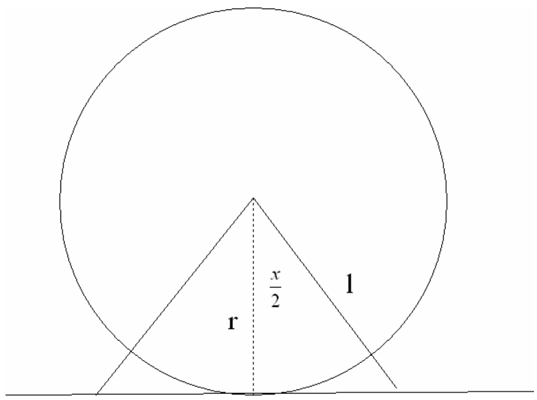
$$x = \frac{2\pi}{n}$$

L'area del triangolo è

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$ quindi l'area del poligono sarà

$$S_n = nA_1 = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

Si ricavi una formula analoga per l'area del poligono circoscritto



Sia l il lato del triangolo , r il raggio ed x l'angolo al vertice
Avremo

$$r = l \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$ e quindi $$l = \frac{r}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Dove

$$x = \frac{2\pi}{n}$$ come nel caso precedente

La base del triangolo sarà $2l \sin \frac{x}{2}$

L'area del triangolo sarà

$$A_2 = \frac{1}{2} r\left(2l\sin\frac{x}{2}\right)$$

L'area del poligono circoscritto sarà

$$S_n^C = nrl\sin\frac{x}{2}$$

Essendo $l = \dfrac{r}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ avremo

$$S_n^C = nrl\sin\frac{x}{2} = nr^2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = nr^2\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$$

3) si calcoli $\lim_{n\to\infty}\dfrac{nr^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

Poniamo $x = \dfrac{2\pi}{n}$

Osservando che

Se $n\to\infty \Rightarrow x\to 0$ essendo $n = \dfrac{2\pi}{x}$ avremo

$$\lim_{x\to 0}\frac{nr^2}{x}\sin x = \pi r^2$$

Che è l'area del cerchio

4) Il problema della quadratura del cerchio è uno dei problemi classici dell'antichità, assieme a quello della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo.
Nessuno di questi è risolubile con i metodi della geometria (utilizzando costruzioni che richiedono solo la riga e il compasso)
La soluzione di questo problema è stata affrontata da Archimede con il metodo di esaustione, che consiste nel confrontare l'area del poligono circoscritto di n lati e quella del poligono inscritto, e stabilisce che tendono allo stesso valore.
Archimede però non fu in grado di generalizzare questo risultato, anzi fu costretto a calcolarlo solo in modo approssimato, utilizzando poligoni con un grande numero di lati (ma non infiniti)
Notiamo che risolvere correttamente questo problema equivale a calcolare π con un grande numero di cifre decimali. Solo con l'ausilio dell'analisi matematica è stato possibile risolvere problemi di questo tipo