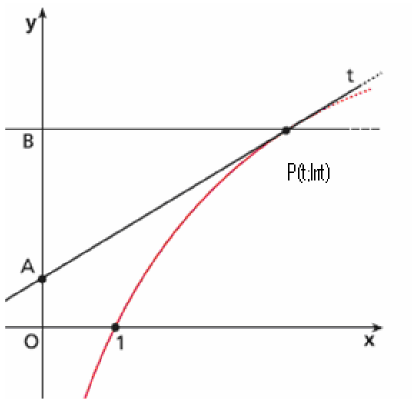
Punto 1



La retta tangente alla curva in $P(t;\ln t)$ con $t>0$ avrà equazione

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

Intersecando la retta con l'asse y $(x=0)$ avremo

$$y=\ln t-1$$

Otteniamo quindi il punto

$$A(0;\ln t-1)$$

Il punto B ha coordinate

$$A(0;\ln t)$$

La distanza AB sarà

$d(A,B)=\left|\ln t-\ln t+1\right|=1$ ed è costante al variare del punto P

Se $g(x)=\log_a x$ con $a\neq 1$

La retta tangente sarà

$$y-\log_a t=\frac{1}{t\ln a}(x-t)$$

$$y=\log_a t=\frac{1}{t}\log_a e\cdot x-\log_a e$$

Il punto A avrà coordinate $(per\ x=0)$

$A\left(0;\log_a t-\log_a e\right)$ inoltre $B\left(0;\log_a t\right)$

La distanza AB sarà

$$d(A,B)=\left|\log_a t-(\log_a t-\log_a e\right|=\log_a e$$

Che à costante al variare di P

Punto 2

$$y=\log_a x$$

Il coefficiente angolare per $x=1$ sarà

$$y'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$m=y'(1)=\log_a e$$

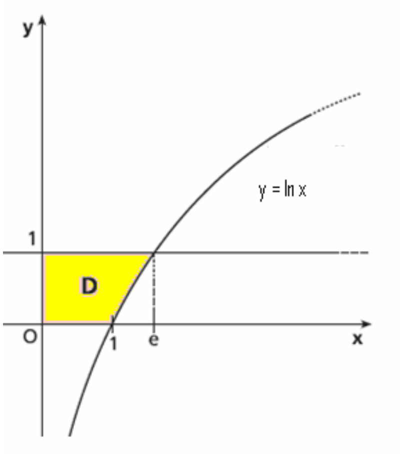
Essendo $m=\operatorname{tg}\delta$ avremo

$m = \operatorname{tg}\delta$
$\operatorname{tg}\delta = \log_a e$

se $\delta = 45°$ otteniamo
$\log_a e = 1$ e quindi
$a = e$

Se $\delta = 135°$ avremo
$\log_a e = -1$ da cui
$e = a^{-1}$ e quindi
$a = \dfrac{1}{e}$

Punto 3



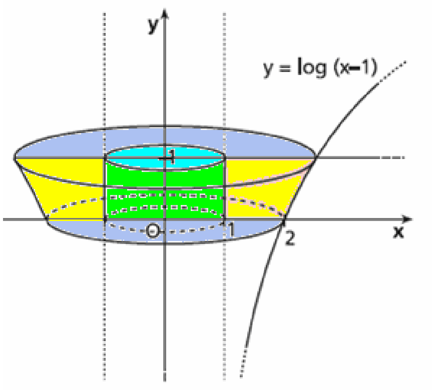
Se $y = 1$ avremo $x = e$

L'area del rettangolo sarà
$S_{rett} = e$
L'area delimitata dalla curva sarà

$$S = \int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^e = e\ln e - e - \ln 1 + 1 = 1$$

L'area del dominio D sarà
$S_D = S_{rett} - S = e - 1$

Punto 4



Operando una traslazione di assi, portando l'asse y a coincidere con la retta $x=-1$ avremo

Da $y=\ln x$ otteniamo

$y=\ln(x-1)$ da cui

$x-1=e^{y}$

$x=e^{y}+1$

Il volume sarà dato dalla differenza fra il volume ottenuto dalla rotazione della funzione attorno all'asse delle y e dal volume del cilindro di base e altezza 1. avremo

$$V=\pi\int_0^1(e^{y}+1)^2dy-\pi=\pi\int_0^1(e^{2y}+1+2e^{y})dy-\pi=$$

$$\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}+y+2e^{y}\right]_0^1-\pi=\pi\left[\frac{e^2}{2}+1+2e-\frac{1}{2}-2\right]-\pi=\left[\frac{e^2}{2}++2e-\frac{3}{2}-1\right]$$

$$V=\left[\frac{e^2}{2}++2e-\frac{5}{2}\right]$$