Problema 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

Dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$

Punto 1

Si provi che $a = 1$ e $b = -1$

Imponendo alla curva di passare per il punto $(0;2)$ avremo

$$b + 3 = 2$$

Calcoliamo la derivata prima

$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} + (ax+b)e^{-\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)$ essendo $f'(4) = 0$ avremo

$$ae^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}(4a+b)e^{-\frac{4}{3}} = 0$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} b = -1 \\ a - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ 3a - 4a + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Punto 2

Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.

Il dominio della funzione è $D_f = \mathbb{R}$ incontra l'asse y in $(0;2)$ e l'asse delle ascisse in in punto di ascissa negativa

Condizioni agli estremi

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 3$$

Pertanto la retta $y = 3$ è un asintoto orizzontale destro

Studio derivata prima

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}(x-1)e^{-\frac{x}{3}} \geq 0$$

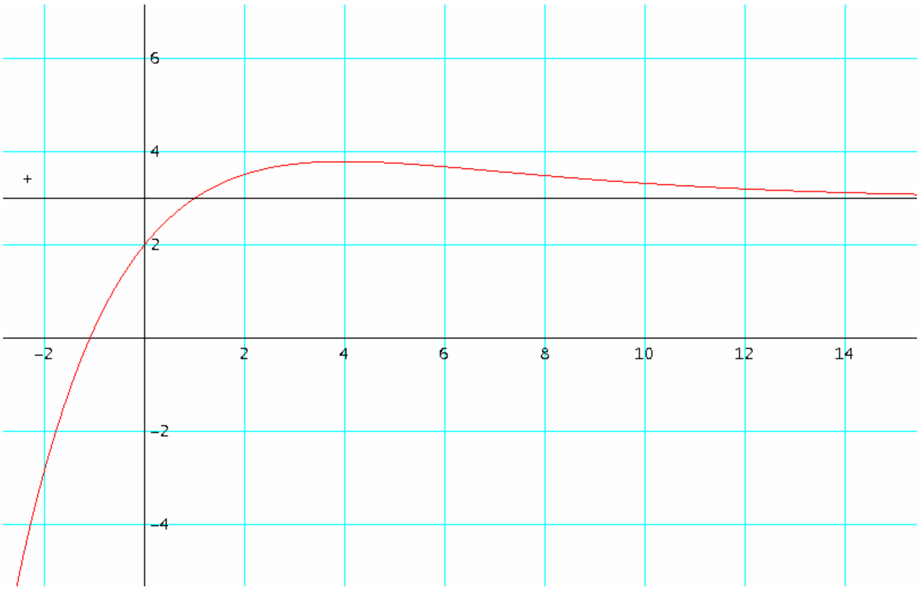
$$e^{-\frac{x}{3}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x\right) \geq 0 \qquad x \leq 4$$

La funzione ha un massimo nel punto $(4;3e^{-\frac{4}{3}}+3)$

Studio derivata seconda

$$f''(x)=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}\right)\geq 0$$ e si ha un flesso per $x=7$

Il grafico sarà

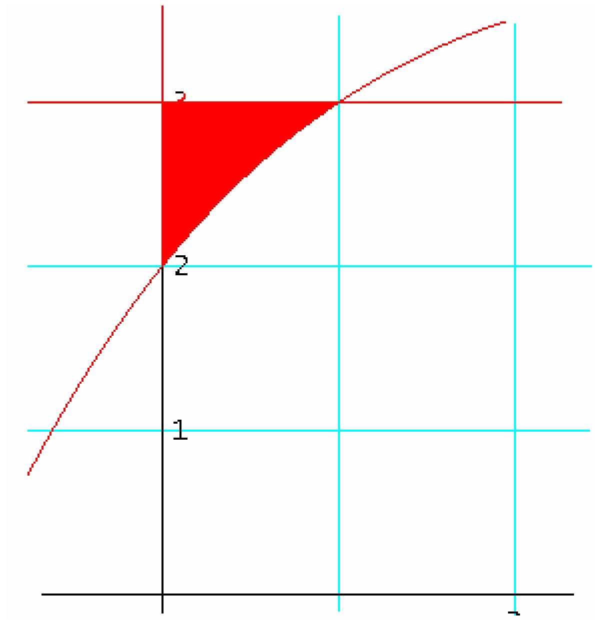


Punto 3

Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y=3$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} y=3 \\ y=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3 \end{cases}$$ avremo $x=1$ y = 3



L'area della regione sarà

$$S = \int_0^1 (3-(x-1)e^{-\frac{x}{3}} - 3)dx =$$

$$S = \int_0^1 (-(x-1)e^{-\frac{x}{3}})dx = \left[-3e^{-\frac{x}{3}}(1-x) - 3\int e^{-\frac{x}{3}}dx \right]_0^1 = \left[-3e^{-\frac{x}{3}}(1-x) + 9e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^1$$

$$S = -3e^{-\frac{1}{3}} + 9e^{-\frac{1}{3}} + 3 - 9 = 9e^{-\frac{1}{3}} - 6$$

Punto 4

Mediante l'uso di una calcolatrice avremo

$$f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

otteniamo

0	2
1	3
2	3,51
3	3,74
4	3,79
5	3,76
6	3,68

Dalla tabella ottenuta, confrontandola con quella fornita dal testo si nota che rispetta la condizione richiesta, per cui possiamo concludere che col passare degli anni non si avranno profitti inferiori a tre milioni di euro