Punto 1

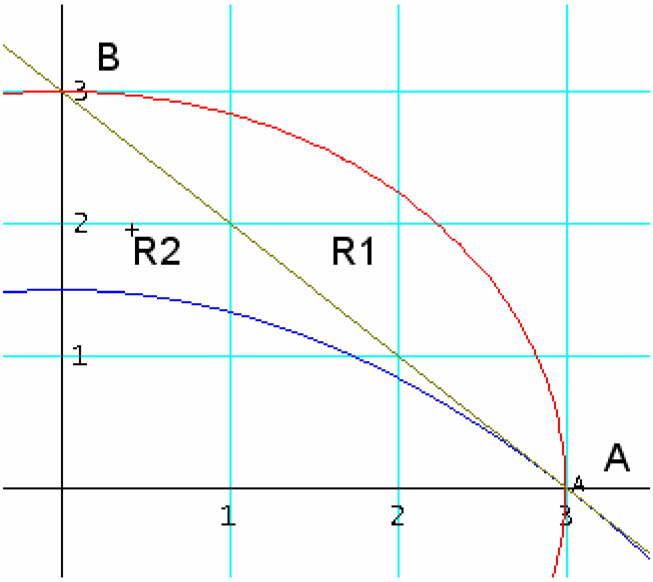
Sia L: $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$ l'equazione della parabola

La retta tangente i A alla parabola sarà

$y' = -\frac{1}{3}x$

$m = y'(3) = 1$ per cui l'equazione della ratta tangente sarà

$y = -x + 3$



L'3quazione della circonferenza assegnata è

$x^2 + y^2 = 9$

L'area R1 sarà data dalla differenza tra l'area di un quarto di cerchio e l'area del triangolo rettangolo avente base e altezza 3. avremo

$R1 = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}$

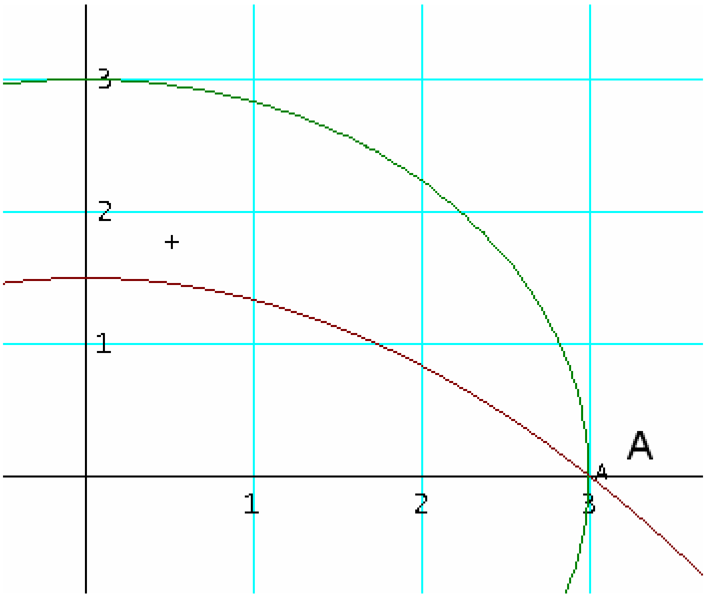
L'area R2 sarà data dalla differenza tra l'area del triangolo precedente e metà dellarea del segmento parabolico la cui area è data dalla relazione

$S = \frac{1}{6}\left|a(x_2 - x_1)^3\right|$

Avremo

$R2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\bullet 216 \bullet \left(-\frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{2}$

Punto 2



Essendo

$$V = \int_a^b S dx \qquad \text{avremo}$$

$$V = \int_0^3 e^{5-3x} dx = -\frac{1}{3}\left[e^{5-3x}\right]_0^3 = \frac{1}{3e^4}\left(e^9 - 1\right)$$

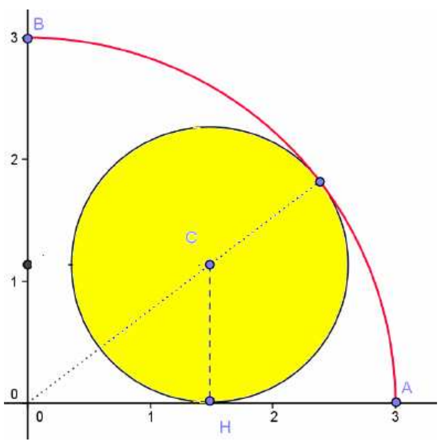
Punto 3

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse x sarà dato da

$$V = \pi \int_0^3 \left[9 - x^2 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{2}\right)^2\right] dx = \pi \int_0^3 \left[9 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{36} - \frac{9}{4}\right] dx$$

$$V = \pi\left[\frac{27}{4}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{180}\right]_0^3 = \frac{72}{5}\pi$$

Punto 4

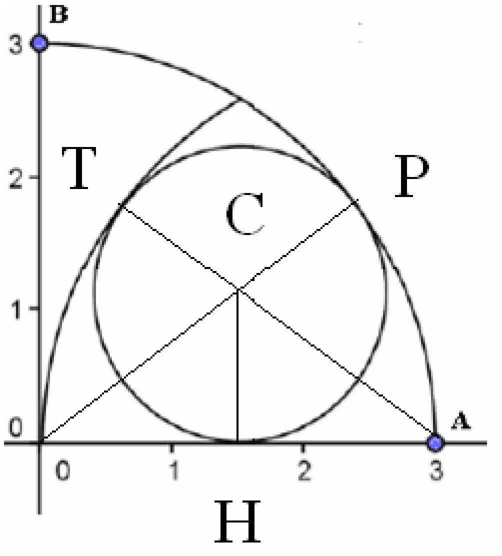


Sia $C(x;y)$ il centro della circonferenza; siccome le due circonferenze son tangenti internamente , la distanza fra i centri deve essere uguale alla differenza fra i raggi per cui $OC = R - y = 3 - y$

Essendo $OC = \sqrt{x^2 + y^2}$ avremo

$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 - y$ elevando al quadrato otteniamo

$x^2 = 9 - 6y$ che è l'equazione della parabola



Si ha CT = r CP = r OC = AC OC =3 - r
Il triangolo OAC risulta isoscele avente base OA

Sarà $CH = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}$

Dette x e y le coordinate del centro si ha

$x = \frac{3}{2}$ $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$

Sostituendo otteniamo

$$y = -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 11$$

Le coordinate del centro saranno

$$C\left(\frac{3}{2};1\right)$$

Poiché il raggio è uguale all'ordinata del centro avremo

$r = 1$

L'equazione della circonferenza sarà

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{cioè}$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 2y + \frac{9}{4} = 0$$