Problema 2

$$f(x) = \frac{8}{4+x^2}$$

punto 1

$D_f =]-\infty ; +\infty[$

La funzione è pari per cui il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y

La curva non interseca l'asse x

per $x = 0$; $y = 2$ $(0;2)$

La funzione è sempre positiva

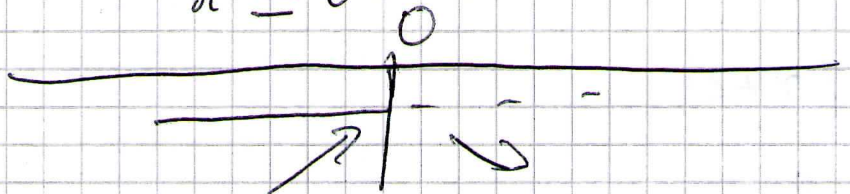
si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0$$

l'asse x è un asintoto orizzontale

$$y' = -\frac{16x}{(4+x^2)^2} \geq 0$$

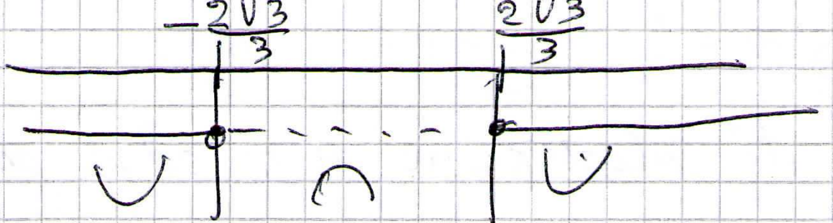
$$x \leq 0$$



ammette un massimo per $x = 0$ e $y = 2$

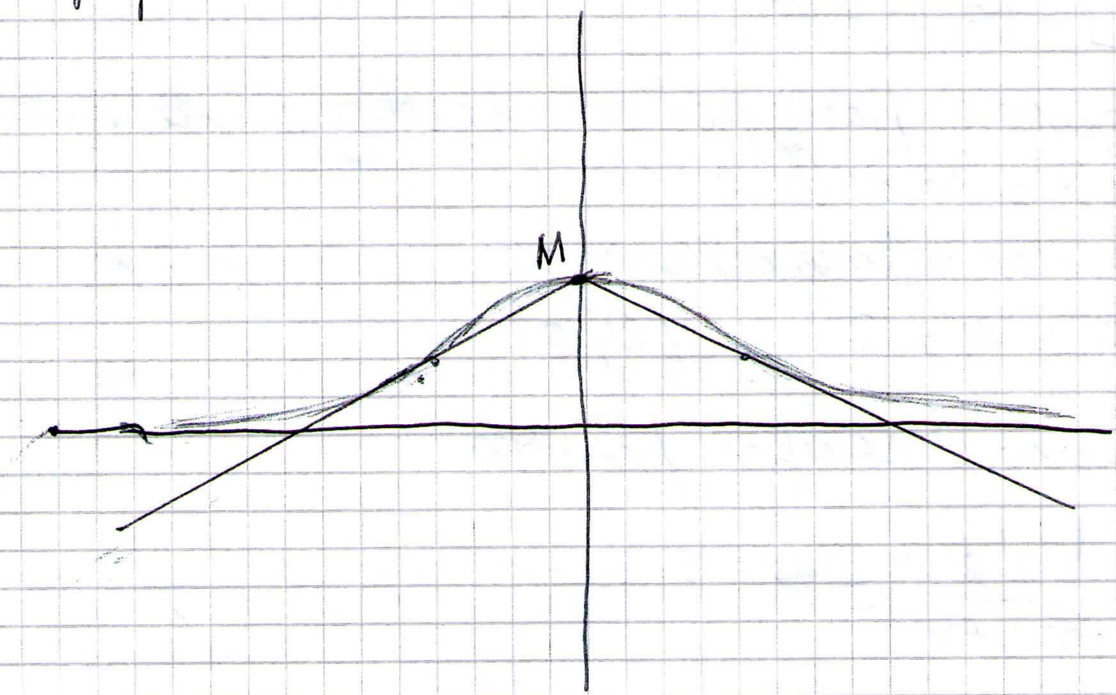
~~Ebbene~~ $f''(x) = \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$ e quindi

$3x^2 - 4 \geq 0$; $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$



Si hanno due flessi per $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Il grafico sarà



Le tangenti alla curva sono date da

r) in $P(-2;1)$

$y - 1 = f'(-2)(x+2)$ con $m = f'(-2) = \frac{1}{2}$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x+2)$

$y = \frac{1}{2}x + 2$

s) in $Q(2;1)$

$y - 1 = f'(2)(x-2)$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)$

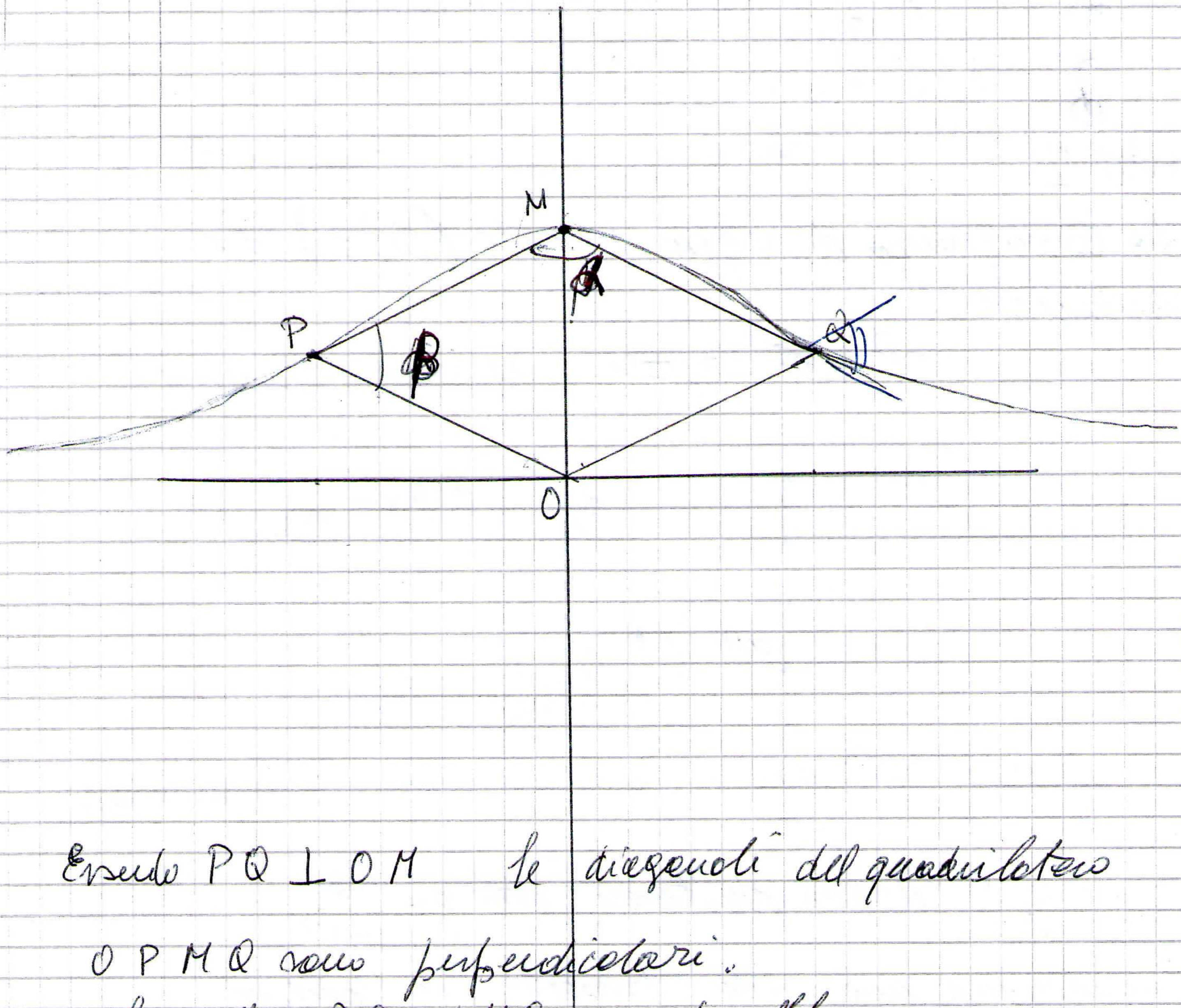
$y = -\frac{1}{2}x + 2$

Il punto di intersezione di r ed s sarà

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$x = 0$; $y = 2$; $M(0, 2)$



Essendo $PQ \perp OM$ le diagonali del quadrilatero $OPMQ$ sono perpendicolari.

Le rette PQ ed MQ sono parallele

Le rette PM e OQ sono parallele.

La distanza OP sarà $OP = \sqrt{5}$

La distanza $OQ = \sqrt{5}$ per cui il quadrilatero sarà un rombo l'angolo formato dalle due rette r, s sarà

$$tg\,\alpha = \frac{|m_1 - m_2|}{1 + m_1 m_2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

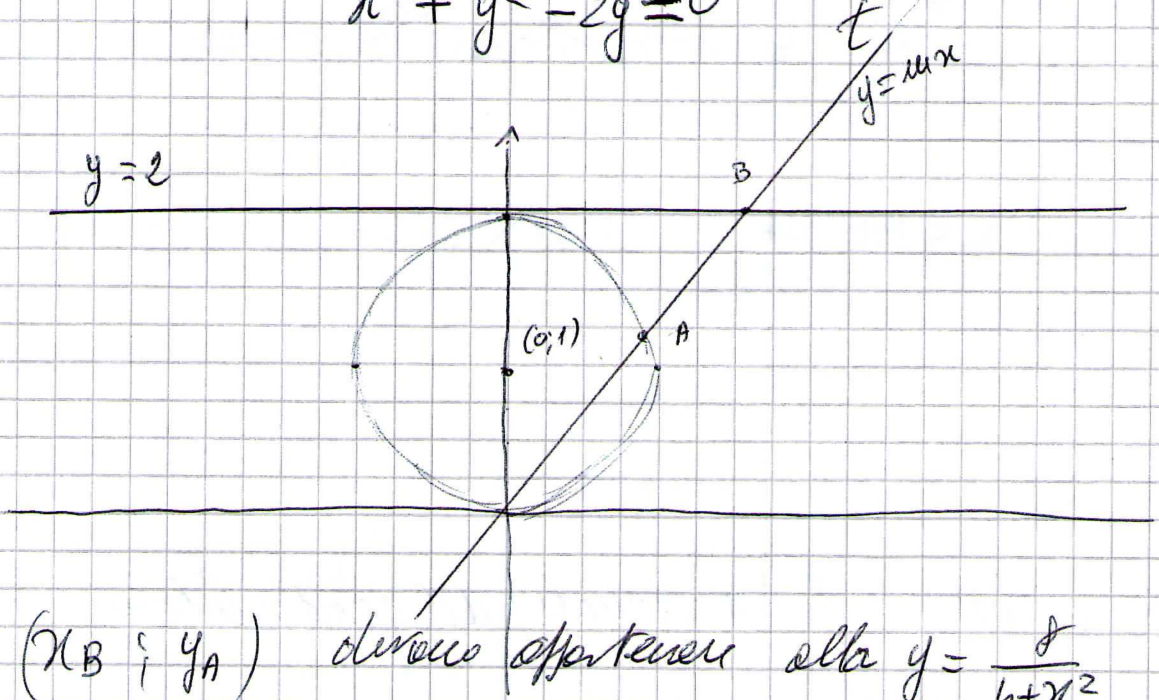
$\alpha = arctg\,\frac{4}{3}$; $\alpha \cong 53°$

$\beta = 180° - 53 = 127°$

punto 2

La circonferenza di raggio 1 centro $(0;1)$ ha equazione

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$



$(x_B ; y_A)$ devono appartenere alla $y = \frac{8}{4+x^2}$

Consideriamo una retta passante per l'origine

$y = mx$ sia

$\begin{cases} y = mx \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2}{m} \\ y = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow x_B = \frac{2}{m}$

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y}{m}$$

$$\frac{y^2}{m^2} + y^2 - 2y = 0$$

$$y\left[y(1+m^2) - 2m^2\right] = 0$$

$$y = 0 \qquad y = \frac{2m^2}{1+m^2} \implies y_A = \frac{2m^2}{1+m^2}$$

Sostituendo nelle curve avremo

$$\frac{2m^2}{1+m^2} = \frac{8}{4+\frac{4}{m^2}}$$

$$\frac{2m^2}{1+m^2} = \frac{2m^2}{1+m^2}$$

il punto $(x_B ; y_A) \in$ alle curve $\forall m$

3) $$S = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = 8\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{8}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx$$

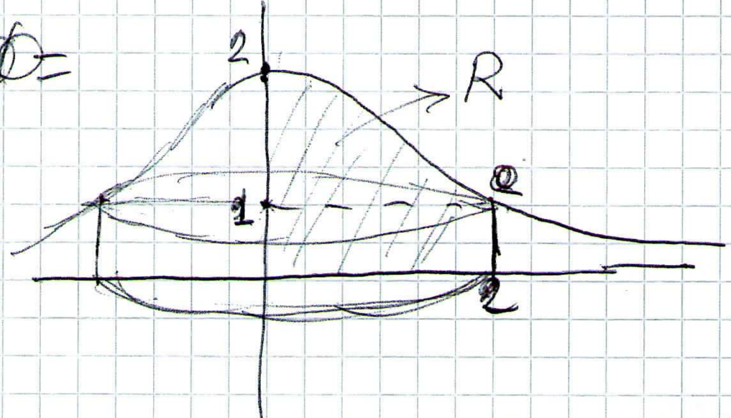
$$= 2\cdot 2\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 4\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2 = \pi$$

Area del cerchio $= \pi r^2 = \pi$

$$S = \lim_{t\to\infty} 2\int_0^t \frac{8}{4+x^2}\,dx = 2\lim_{t\to\infty} 4\operatorname{arctg}\frac{t}{2} = 8\,\frac{\pi}{2} = 4\pi$$

4) l'integrale richiesto sarà

$V_C =$



Il volume del solido sarà dato dalla somma del volume del cilindro di raggio 2 e altezza 1 con il volume del solido dato dall'integrale

$$V_1 = \pi \int_1^2 \frac{8-4y}{y}\, dy = 4\pi \int_1^2 \frac{2-y}{y}\, dy.$$

Volume solido

$$V = V_C + V_1 = 4\pi + 4\pi \int_1^2 \frac{2-y}{y}\, dy.$$