$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

Punto1

Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$

Il dominio della funzione è dato da

$4 - x^2 \geq 0$

$-2 \leq x \leq 2 \quad D_f = [-2;2]$

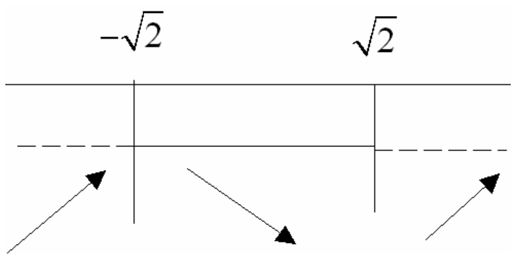
Per calcolareil massimo e il minimo procediamo con lo studio della derivata prima

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0$$

Avremo

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

E quindi

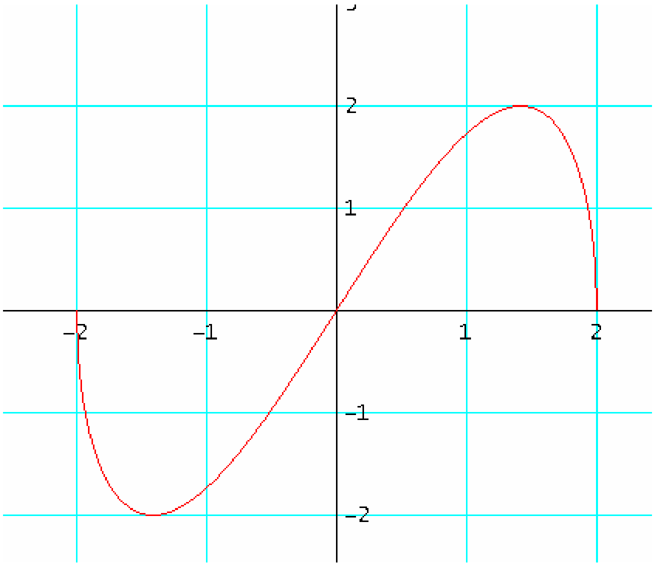


Si ha un punto di minimo per $x = -\sqrt{2}$ e un massimo per $x = \sqrt{2}$

Essendo

$f(-2) = 0 \quad f\left(-\sqrt{2}\right) = -2 \quad f\left(\sqrt{2}\right) = 2 \quad f(2) = 0$

Avremo un minimo assoluto nel punto $\left(-\sqrt{2};-2\right)$ e un massimo assoluto nel punto $\left(\sqrt{2};2\right)$



Punto 2

Si dica se l'origine O è centro di simmetria e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O forma con la direzione positiva dell'asse x

$$f(-x) = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

La funzione essendo dispari il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine
La derivata prima nel punto $x_0 = 0$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in O

$$f'(0) = 2$$
$$\text{tg}\,\alpha = 2 \quad \alpha = arc\,\text{tg}\,2 = 63°26'6"$$

Punto 3

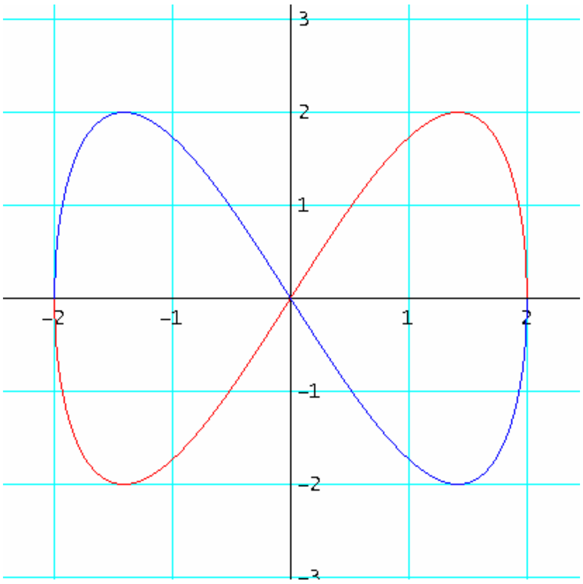
Si disegni la curva di equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa

$$y^2 = x^2(4-x^2)$$

Si ha

$$y = \pm x\sqrt{4-x^2}$$

Sovrapponendo i due grafici avremo



L'area sarà

$$S=4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=-2\int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}=\frac{4}{3}\left[\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_0^2=\frac{32}{3}$$

Punto4

Sia $h(x)=\sin\left(f\left(x\right)\right)$ con $0\le x\le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte?

$$h(x)=\sin\left(f\left(x\right)\right) \qquad \text{con } 0\le x\le 2$$

Avremo $h(x)=1$ e quindi

$$\sin\left(f\left(x\right)\right)=1$$
$$\sin x\sqrt{4-x^2}=1$$
$$x\sqrt{4-x^2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Essendo $0\le x\le 2$ $\quad -2\le f\left(x\right)\le 2$ dovrà essere $k=0$ e quindi

$$x\sqrt{4-x^2}=\frac{\pi}{2}$$
$$x^2\left(4-x^2\right)=\frac{\pi}{2}$$
$$x^4-4x^2+\frac{\pi^2}{4}=0$$
$$x^2=2\pm\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}} \qquad x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}}$$

Si hanno due punti di intersezione tra la curva e la retta cioè

$x=\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}}$ e $x=\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}}$

Calcoliamo il numero di intersezioni distinte dell'equazione $h(x)=4$ con $0\le x\le 2$

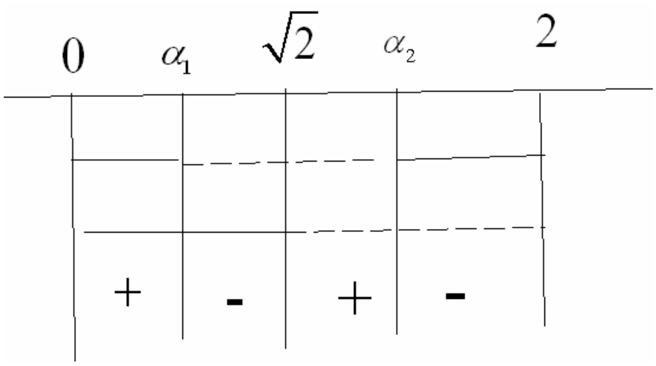
Si ha

$$h'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\cos\left(x\sqrt{4-x^2}\right)$$

$4-2x^2\ge 0$ $\qquad\qquad \le x\le\sqrt{2}$

$\cos\left(x\sqrt{4-x^2}\right)\ge 0$

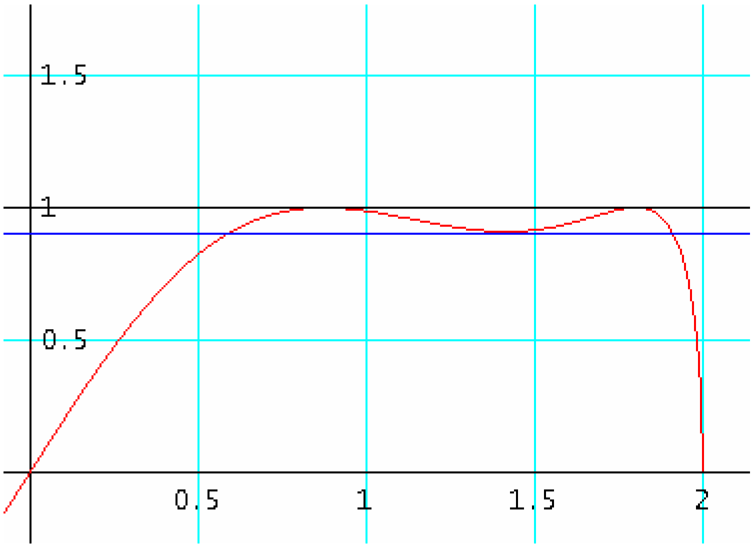
Che risulta verificata da $0\le x_1\le\alpha$ e $\alpha_1\le x\le 2$ si ha il grafico



Di ha un minimo relativo per $x=\sqrt{2}$ mentre il minimo assoluto è per $x=0$ e per $x=2$

Si ha $h\left(\sqrt{2}\right)=\sin 2\simeq 0,9$ $\quad h\left(\alpha_1\right)=h\left(\alpha_2\right)=1$

Si hanno quattro soluzioni per $\sin 2\le k\le 1$



Come si evince dal grafico