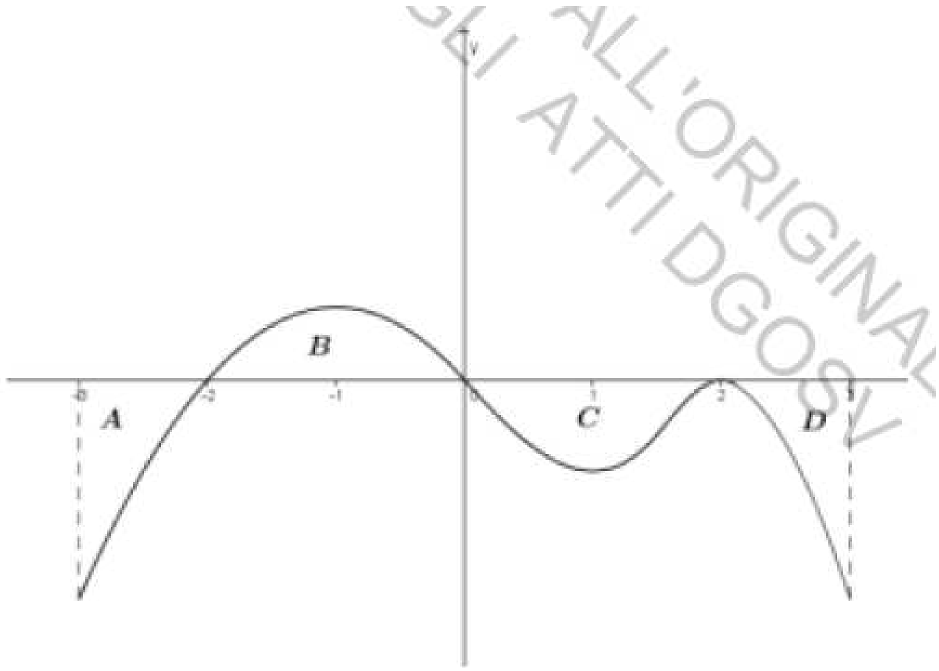
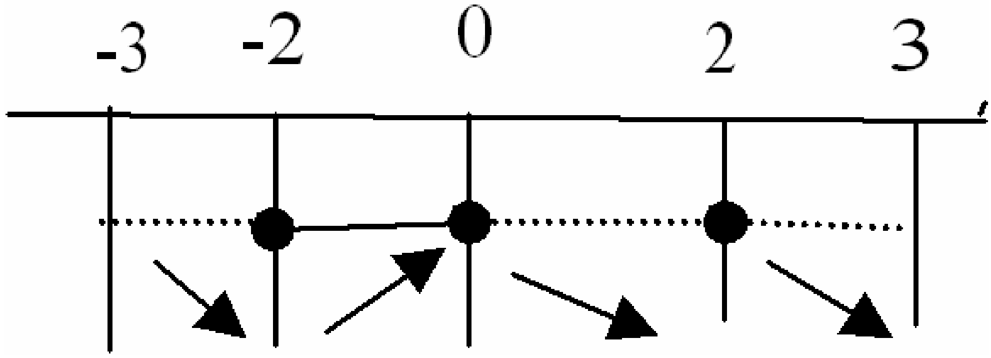
Punto 1

$f(x)$ è un polinomio di quarto grado perché, come si evince dal grafico, una retta orizzontale ha al massimo 4 intersezioni con la curva.



Punto 2

Essendo $g'(x) = f(x)$ i punti di massimo e di minimo relativo della $f(x)$ sono i valori che annullano la $f(x)$ quindi saranno $-2, 0, 2$. Per individuare il punto di massimo relativo richiesto osserviamo la tabella



Dalla quale si evince che si ha un massimo relativo per $x = 0$ un minimo relativo per $x = -2$ e un flesso a tangente orizzontale per $x = 2$.
La $g(x)$ volge la concavità verso l'alto dove la $f(x)$ è crescente ovvero negli intervalli $[-3;-1]$ e $[1;2]$

Punto 3

Si ha $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt + c$
Essendo $g(3) = -5$ avremo

$\int_{-3}^{3} f(t)dt + c = -5$

Dalla figura si ha

$\int_{-3}^{3} f(t)dt = -2+3-3-1 = -3$ quindi

$-3+c=-5$ da $c=-2$ cui $c=-2$

Quindi

$g(0) = \int_{-3}^{0} f(t)dt - 2$ essendo

$\int_{-3}^{0} f(t)dt = -2+3 = -1$

$g(0) = 1-2 = -1$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)^{H} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = 0$$

Punto 4

Essendo $h(x) = 3f(2x+1)$

Posto $2x = t-1$ $x = \frac{t-1}{2}$ $dx = \frac{1}{2}dt$ inoltre per $x=-2$ $t=-3$ per $x=1$ $t=3$ quindi

$$\int_{-2}^{1} 3f(2x+1)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}$$