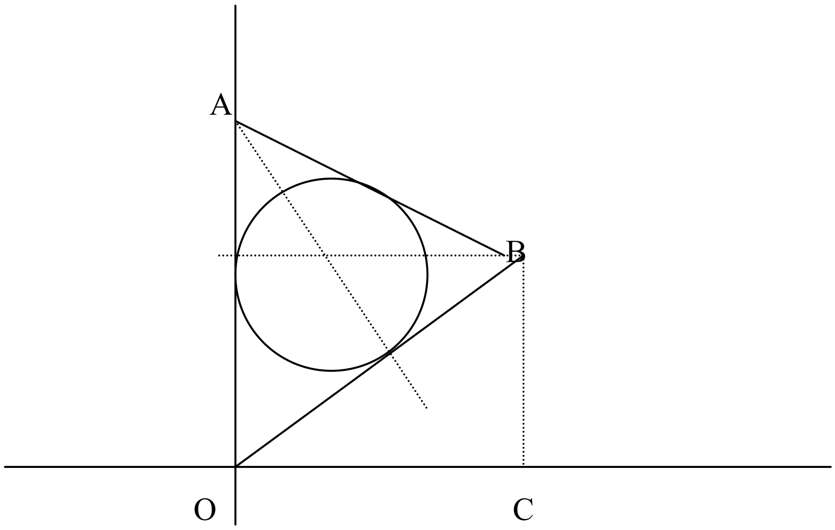
Tema 2 P.N.I

e)Per determinare il centro della circonferenza possiamo trovare le bisettrici di due angoli del triangolo e determinarne l'intersezione.



Retta AB:

$$A(0,2) \quad ; \quad B(1,1)$$

$$x = \frac{y-2}{-1} \quad \Rightarrow \quad x + y - 2 = 0$$

Retta OB

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} \quad \Rightarrow \quad y = x$$

La bisettrice delle rette AB ed OB sarà ovviamente la retta di equazione $y = 1$; infatti

$$\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right|$$

Eliminando i valori assoluti otteniamo:

$$\cancel{x} + y - 2 = \cancel{x} - y$$

$$y = 1$$

L'altra bisettrice è la retta $x = 1$ che non viene considerata poiché non risulta interna al triangolo.

Retta OA

$$x = 0$$

La bisettrice delle rette OA ed OB è data da

$$\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right| = |x|$$

e quindi

$x+y-2=\sqrt{2}x$

$\left(\sqrt{2}-1\right)x-y+2=0$ il cui coefficiente angolare risulta >0, pertanto non viene considerata poiché non risulta interna al triangolo.

$x+y-2=-\sqrt{2}x$

$\left(\sqrt{2}+1\right)x+y-2=0$ il cui coefficiente angolare risulta <0 ed è quindi la bisettrice cercata.

Il centro della circonferenza sarà dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}+1\right)x+y-2=0\\ y=1\end{cases}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)x-1=0$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

Il centro avrà quindi coordinate

$$G\left(\sqrt{2}-1,1\right)$$

Il raggio dovrà essere uguale all'ascissa del centro perché la circonferenza risulta tangente all'asse y.

La circonferenza avrà pertanto equazione:

$$\left[x-\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2+\left(y-1\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2-2\left(\sqrt{2}-1\right)x+y^2-2y+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$x^2+y^2-2\left(\sqrt{2}-1\right)x-2y+1=0$$

f)Consideriamo una generica affinità:

$$\begin{cases}x'=ax+by+p\\ y'=a'x+b'y+q\end{cases}$$

Essendo il punto O unito poniamo $x'=x$ $y'=y$ e sostituiamo le coordinate di O.

$$\begin{cases}x=ax+by+p\\ y=a'x+b'y+q\end{cases}$$

otteniamo quindi:

$$p=q=0$$

risultato ovvio essendo l'origine punto unito.

La trasformazione diviene:

$$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=a'x+b'y\end{cases}$$

Poiché il punto B si trasforma in A avremo

$$B(1,1) \rightarrow A(0,2)$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases}a+b=0\\ a'+b'=2\end{cases}$$

Essendo inoltre C punto unito si ha

$a=1, \quad a'=0$ e quindi

$b=-1, \quad b'=2$

L'equazione dell'affinità sarà:

$$\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases}$$

Il trasformato A' del punto A sarà

$$\begin{cases} x'=-2 \\ y'=4 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad A'(-2,4)$$

g)L'area del triangolo CAA' sarà

$$S=\frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}(2+4-4)=1$$

h)Per stabilire se l'affinità T ha altri punti uniti, basta porre $x'=x \quad y'=y$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x=x-y \\ y=2y \end{cases} \Rightarrow y=0$$

La retta y=0 sarà quindi la retta luogo di punti uniti.

Per determinare le rette unite troviamo l'equazione dell'affinità inversa:

$$\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=x' \\ 2y=y' \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad y=\frac{y'}{2} \quad \text{e}$$

$$x-\frac{y'}{2}=x'$$

$$x=x'+\frac{y'}{2}$$

L'affinità inversa ha pertanto equazione:

$$T^{-1}: \begin{cases} x=x'+\dfrac{y'}{2} \\ y=\dfrac{y'}{2} \end{cases}$$

Una retta generica ha equazione:

$$y=mx+q$$

la sua trasformata sarà:

$$\frac{y'}{2}=m\left(x'+\frac{y'}{2}\right)+q$$

$$y'=2mx'+my'+2q$$

$$(1-m)y'=2mx'+2q$$

$$y'=\frac{2m}{1-m}x+\frac{2q}{1-m}$$

Poiché le due rette devono coincidere si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{2m}{1-m} = m \\ \dfrac{2q}{1-m} = q \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m - m + m^2 = 0 \\ 2q - q + mq = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + m^2 = 0 \\ q(1+m) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \begin{cases} q = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Se $m = 0 \Rightarrow q = 0$

Se $m = -1 \Rightarrow 0q = 0$ Verificata $\forall q$

Le rette unite sono

$y = 0$ già trovata in precedenza e $y = -x + q$

i)la retta $y = 0$ è esterna alla circonferenza;

la retta $y = -x + q$ risulterà tangente alla circonferenza se (nell'equazione risultante del sistema risulterà $\Delta = 0$)

Si ha:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x - 2y + 1 = 0 \\ y = -x + q \end{cases}$$

e quindi:

$$x^2 + (-x+q) \; - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x - 2(-x+q) + 1 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 2qx + q \; - 2\sqrt{2}x + 2x + 2x - 2q + 1 = 0$$

$$2x^2 + (-2q - 2\sqrt{2} + 4)x + q^2 - 2q + 1 = 0$$

$$2x^2 - 2(q + \sqrt{2} - 2)x + q^2 - 2q + 1 = 0$$

affinché la retta sia tangente dovrà essere:

$$\frac{\Delta}{4} = (q + \sqrt{2} - 2)^2 - 2q^2 + 4q - 2 = 0$$

$$q^2 + 2 + 4 + 2\sqrt{2}q - 4q - 4\sqrt{2} - 2q^2 + 4q - 2 = 0$$

$$-q^2 + 2\sqrt{2}q + 4 - 4\sqrt{2} = 0$$

$$q^2 - 2\sqrt{2}q - 4 + 4\sqrt{2} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 2 + 4 - 4\sqrt{2} = 2(1 + 2 - 2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)^2$$

e quindi:

$$q = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$q_1 = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$q_2 = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 2$$

Le rette tangenti avranno equazioni rispettivamente:

$$y = -x + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$y = -x + 2$$