Tema 3

$$f(x)=a\ln^2 x+b\ln x$$

a)La curva passa per $M\left(\sqrt{e},-\frac{1}{4}\right)$ quindi

$$a\ln^2\sqrt{e}+b\ln\sqrt{e}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$a+2b=-1$$

$$y'=\frac{2a\ln x}{x}+\frac{b}{x}$$

$$y'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{2a\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+\frac{b}{\sqrt{e}}$$ e quindi

$$\frac{\frac{2a}{2}}{\sqrt{e}}+\frac{b}{\sqrt{e}}=0$$

Si ha pertanto il sistema

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$a=1$$

$$b=-1$$

L'equazione sarà quindi:

$$y=f(x)=\ln^2 x-\ln x$$

Dominio della funzione:

$x>0$ e quindi $domf=\left]0,+\infty\right[$

studio del segno della funzione

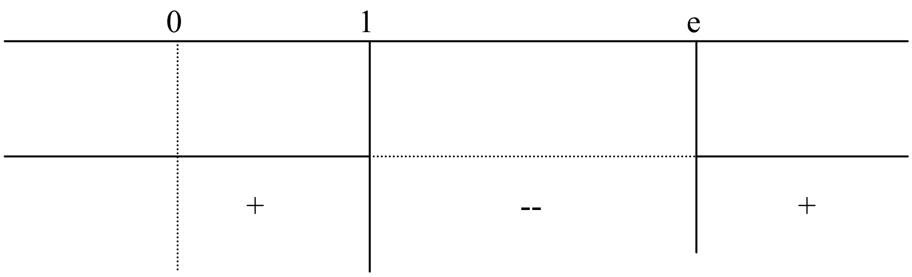
$$\ln^2 x-\ln x\geq 0$$

si ha $\ln x=0$ $\ln x=1$

e quindi

$\ln x\leq 0 \Rightarrow x\leq 1$ $\ln x\geq 1 \Rightarrow x\geq e$

Si ha il grafico



$f(x) > 0 \quad per \quad 0 < x < 1 \quad \vee \quad x > e$

$f(x) = 0 \quad per \quad x = 1 \quad \vee \quad x = e$

$f(x) < 0 \quad per \quad 1 < x < e$

Condizioni agli estremi

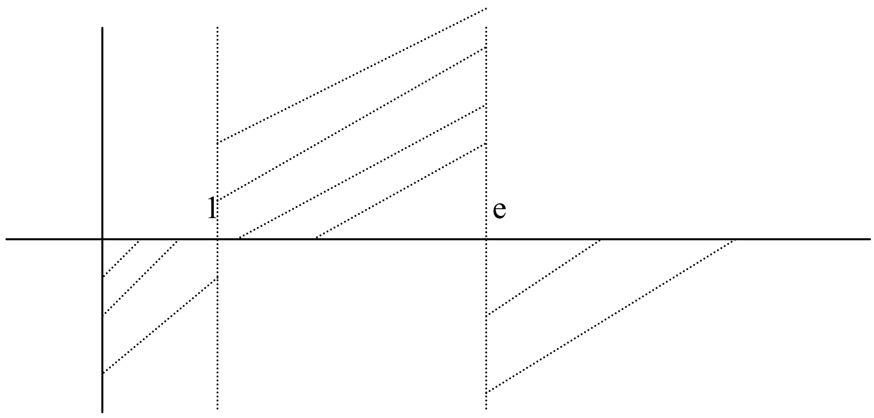
$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln^2 x - \ln x \right) = \lim_{x \to 0^+} \ln x \left(\ln x - 1 \right) = +\infty$$

la retta $x = 0$ è un asintoto verticale destro.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln^2 x - \ln x \right) = \lim_{x \to +\infty} \ln x \left(\ln x - 1 \right) = +\infty$$

pertanto la funzione non ammette asintoti orizzontali, né obliqui

Il grafico approssimato sarà

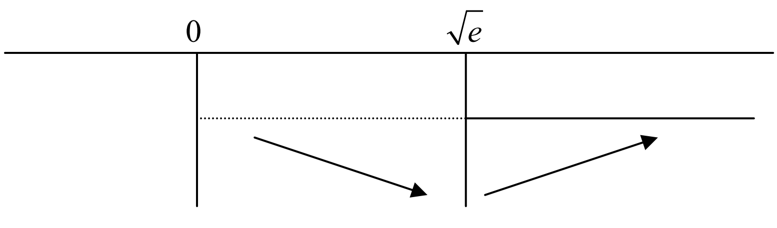


Studio della derivata prima:

$$y' = \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x} \qquad \text{si ha quindi}$$

$$2\ln x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{cioè} \qquad x \geq \sqrt{e}$$

Il grafico relativo sarà:



La funzione ammette un minimo nel punto $M\left(\sqrt{e}, -\frac{1}{4} \right)$

Ritroviamo quindi il valore assegnato.

Studio derivata seconda

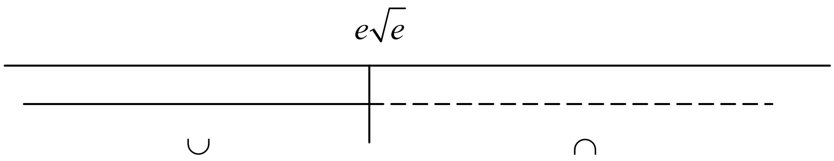
$$y'' = \frac{\frac{2}{x}x - 2\ln x + 1}{x^2} = \frac{-2\ln x + 3}{x^2}$$

si ha quindi:

$$2\ln x - 3 \le 0 \Rightarrow \quad \ln x \le \frac{3}{2}$$

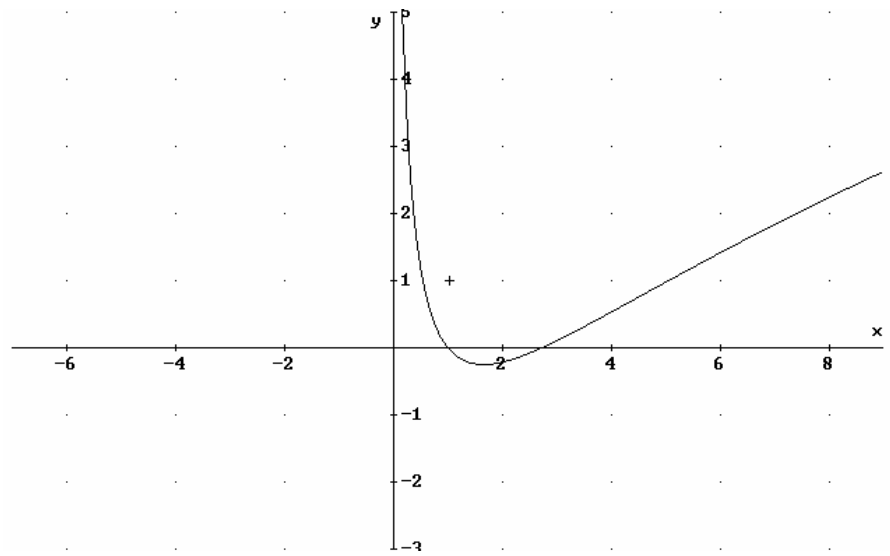
$$\ln x \le \frac{3}{2}\ln e \quad \Rightarrow \quad x \le e\sqrt{e}$$

si ha il grafico:



La curva possiede un flesso nel punto di ascissa $e\sqrt{e}$

Il grafico sarà



L'area individuata dalla curva e dall'asse x sarà data da:

$$S = \left| \int_1^e \left(\ln^2 x - \ln x \right) dx \right|$$

Integrando per parti

$$\int \ln^2 x dx \qquad \text{e ponendo}$$

$$ff = \ln^2 x$$

$$fd = dx$$

avremo

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int 2x \ln x \frac{1}{x} dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x)$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x$$

e quindi

$$S = \left| \left[x\ln^2 x - 2(\ln x - x) - x\ln x + x \right]_1^e \right| = |e-3| = 3-e$$

Probabilità:

Sia $p = P(A)$ la probabilità che si verifichi l'evento A e $q = 1 - p = P(\overline{A})$ la probabilità che non si verifichi l'evento A.

La probabilità di ottenere x volte A in n lanci indipendenti è:

$$C_{n,x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^n q^{n-x} \qquad (1)$$

Ad esempio, supponiamo di valutare la probabilità di ottenere per tre volte il numero 6 in cinque lanci indipendenti di un dado non truccato.

Rappresentiamo con **6** l'evento « esce il numero 6 ›› e con $\overline{\mathbf{6}}$ l'evento «non esce il numero 6 ››. Allora

$$P(6) = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad P(\overline{\mathbf{6}}) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$$

perché i due eventi sono mutuamente esclusivi.

La probabilità della serie di eventi

$\mathbf{6, 6, 6, \overline{6}, \overline{6}}$ **è per la (1)**

$$p = C_{5,3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2}{3 \bullet 2 \bullet 2}\frac{1}{216}\frac{25}{36} = \frac{125}{3888} = 0,0322$$

La probabilità richiesta, poiché i numeri possibili sono 6 , sarà quella trovata moltiplicata per 6.

$$P = 6p = 6\frac{125}{3888} = \frac{125}{648}$$