Sia $a \neq 0$ un numero reale non nullo.
Si ha il sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases} \qquad (1)$$

e quindi

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0 \end{cases}$$

1) Le equazioni del sistema rappresentano due fasci di rette .
la prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele alla bisettrice del 2^0 e 4^0 quadrante non passanti per l'origine, la seconda un fascio di rette passanti per l'origine,
Se $a=-1$ il sistema non ammette soluzioni e le due rette sono parallele e distinte. Se $a \neq -1$ il sistema ammette una sola soluzione.

2) l'equazione del luogo γ si ottiene eliminando il parametro a nelle (1). Avremo:

$$x+y=\frac{x}{y} \qquad \text{e quindi}$$

$$\gamma : y^2+xy-x=0 \quad \text{od anche}$$

$$\gamma : x=\frac{y^2}{1-y}$$

che rappresenta un'iperbole (privata dell'origine).

3) L'equazione della curva γ', simmetrica della curva γ , rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si ottiene applicando la trasformazione

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$$

ovvero scambiando tra loro le variabili x e y.
Avremo:

$$\gamma : x=\frac{y^2}{1-y} \qquad (2)$$

$$\gamma' : y=\frac{x^2}{1-x} \qquad (3)$$

Studio del grafico della funzione (3)

$$\text{dom } f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

Studio del segno

$$\frac{x^2}{1-x}>0 \qquad \text{e quindi}$$

$$f(x)>0 \qquad \text{per} \qquad x<1$$

$$f(x)<0 \qquad \text{per} \qquad x>1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{1-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{1-x}=-\infty$$

quindi la retta $x=1$ è l'asintoto verticale, inoltre

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-x^2}=-1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=-1$$

pertanto la retta

$$y=.x-1$$

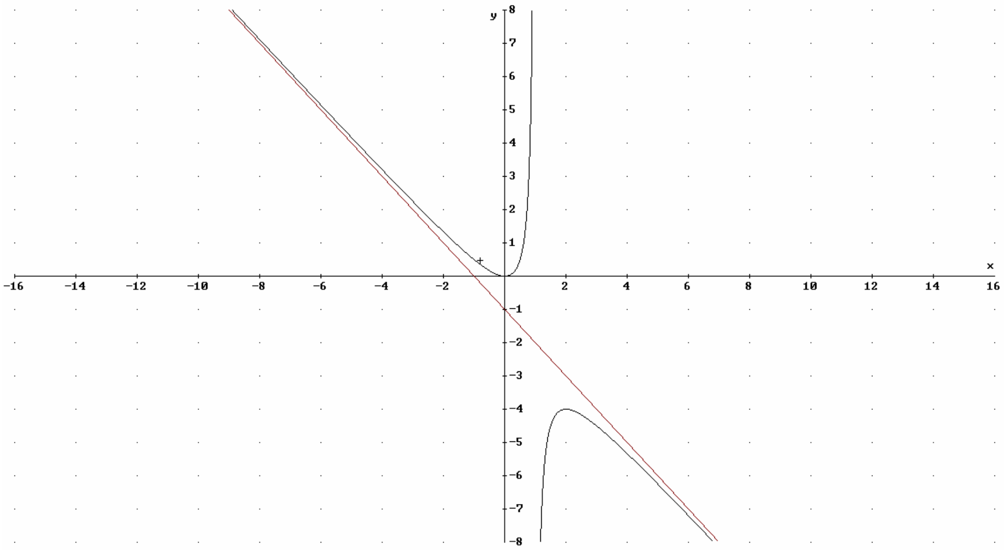
è l'asintoto obliquo.

Per trovare gli eventuali estremi relativi studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x)=\frac{2x-x^{\ 2}}{(1-x)^2}$$

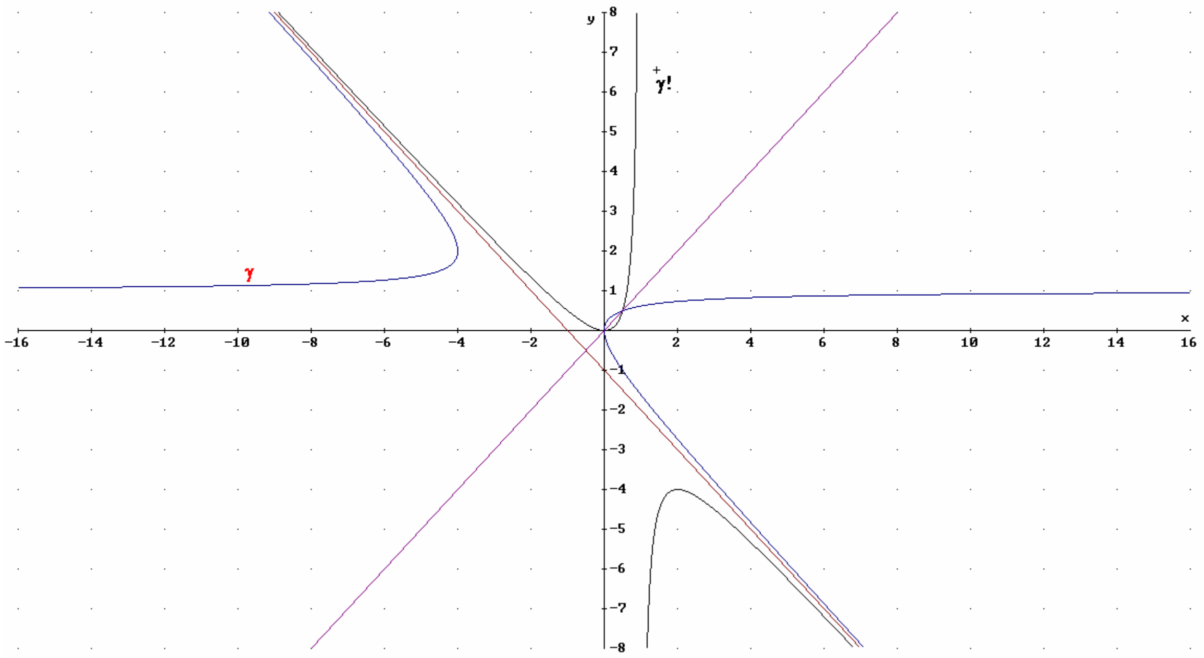
$$f'(x)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x(2-x)\geq 0$$

si ha quindi un punto di minimo in (0;0) ed uno di massimo in (2;-4).



Il punto (0;0), per le limitazioni imposte non dovrebbe essere considerato.

Il grafico della curva γ' è il simmetrico di γ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Si ha il grafico



4) Per Calcolare l'area della regione di piano delimitata da γ e γ' basta calcolare il doppio dell'area compresa fra la bisettrice $y = x$ e γ'. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{x^2}{1-x} \end{cases} \qquad \text{otteniamo}$$

$$2(2x-1) = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{1}{2}$$

Avremo pertanto

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{x^2}{1-x}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= 2\left[x^2 + x + \ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \ln 4$$

Per trovare un valore approssimato dell'area applichiamo alla funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$$

il metodo dei trapezi

Dividiamo l'intervallo $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ in 4 parti uguali $0;\frac{1}{8};\frac{1}{4};\frac{3}{8};\frac{1}{2}$. Essendo

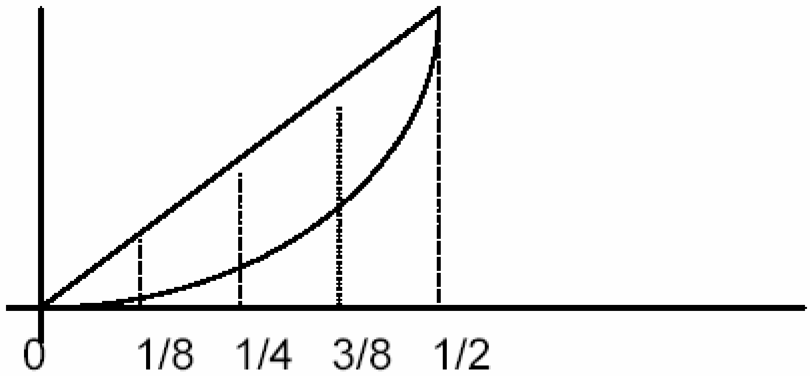
$$f(0) = 0;\quad f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{28};\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6};\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{avremo}$$

$S_1 = \frac{1}{2}\frac{3}{28}\frac{1}{8}$; $S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{28}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{8}$; $S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{20}\right)\frac{1}{8}$; $S_4 = \frac{1}{2}\frac{3}{20}\frac{1}{8}$

Pertanto

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{16}\frac{356}{420} = 0,0529...$$

$$S = 0,106$$



5) Per $x = 1$ dalla

$$\gamma : y^2 + xy - x = 0$$

otteniamo

$$y^2 + y - 1 = 0$$

e quindi

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nel caso della soluzione positiva $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ otteniamo la sezione aurea di un segmento di lunghezza unitaria (chiamato anche numero d'oro).