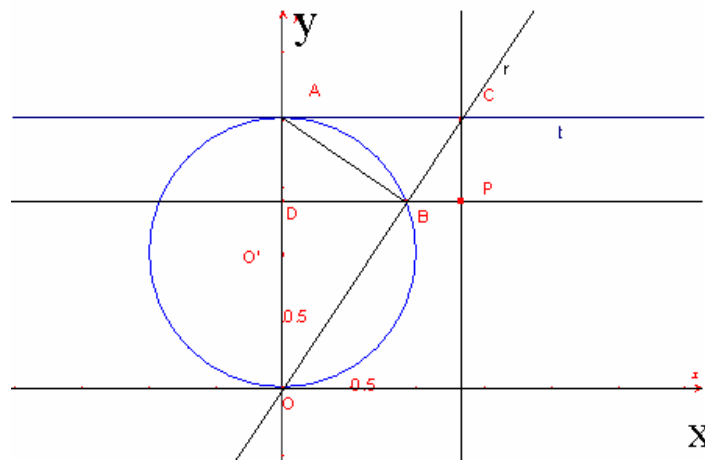


Problema 1 PNI



1)

a) $OD : DB = OA : DP$

I triangoli rettangoli $\triangle OAC$ e $\triangle ODB$ sono simili perché hanno l'angolo \widehat{AOC} in comune. Avremo quindi:

$$OD : DB = OA : AC$$

Poiché $AC = DP$ otteniamo

$$OD : DB = OA : DP$$

b) $OC : DP = DP : BC$

Il lato AB è perpendicolare a OB perché un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo. Inoltre AB è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo $\triangle OAC$. Applicando il 1° teorema di Euclide avremo:

$$OC : AC = AC : BC$$

essendo $AC = DP$ avremo

$$OC : DP = DP : BC$$

2) Fissiamo un sistema di riferimento ortogonale assumendo come asse x la tangente alla circonferenza nel punto O e come asse y la perpendicolare passante per O e per A .

Avremo quindi che $O' \left(0; \frac{a}{2} \right)$

L'equazione della circonferenza γ , essendo $r = \frac{a}{2}$ avrà equazione

$$\gamma: x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\gamma: x^2 + y^2 - ay = 0$$

La retta r passante per O avrà equazione

$$y = mx$$

le coordinate del punto B si trovano risolvendo il sistema formato dalla circonferenza γ e dalla retta r

$$B = \gamma \cap r: \begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

$$x^2 + m^2 x^2 - max = 0$$

e quindi

$$x = \frac{am}{m^2 + 1} \quad y = \frac{am^2}{m^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{am}{m^2 + 1}; \frac{am^2}{m^2 + 1}\right)$$

le coordinate del punto C si ottengono risolvendo il sistema formato dalle rette t ed r

$$C = t \cap r: \begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{a}{m}; a\right)$$

L'equazione della retta PB è

$$y = \frac{am^2}{m^2 + 1}$$

L'equazione della retta PC è

$$x = \frac{a}{m}$$

Il punto P intersezione fra le rette PB e PC avrà coordinate

$$\begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = \frac{am^2}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Eliminando il parametro m otteniamo l'equazione del luogo geometrico Γ

Essendo $m = \frac{a}{x}$ avremo

$$y = \frac{a \frac{a^2}{x^2}}{\frac{a^2}{x^2} + 1} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

$$\Gamma: y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \quad \text{con } a > 0$$

$$\mathbf{3)} \quad y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Il dominio della funzione è

$$\text{dom } f =]-\infty; +\infty[$$

Interseca l'asse y nel punto $A(0; a)$ e non Interseca l'asse x , inoltre la funzione è pari.

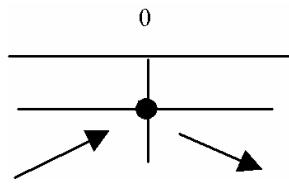
Essendo $a > 0$ risulta sempre positiva.

Condizioni agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} = 0 \quad \text{avremo un asintoto orizzontale di equazione } y = 0$$

Studio della derivata prima

$$y' = -\frac{2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2} \geq 0 \quad \text{per } x \leq 0 \quad \text{quindi}$$



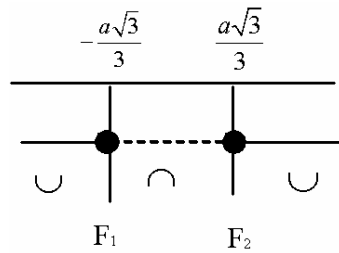
avremo quindi un massimo per $x = 0 \Rightarrow (0; a)$

Studio derivata seconda

$$y'' = -\frac{2a^3(x^2 + a^2)^2 - 4x(x^2 + a^2)2a^3x}{(x^2 + a^2)^4} = -\frac{2a^3(x^2 + a^2)(x^2 + a^2 - 4x^2)}{(x^2 + a^2)^4}$$

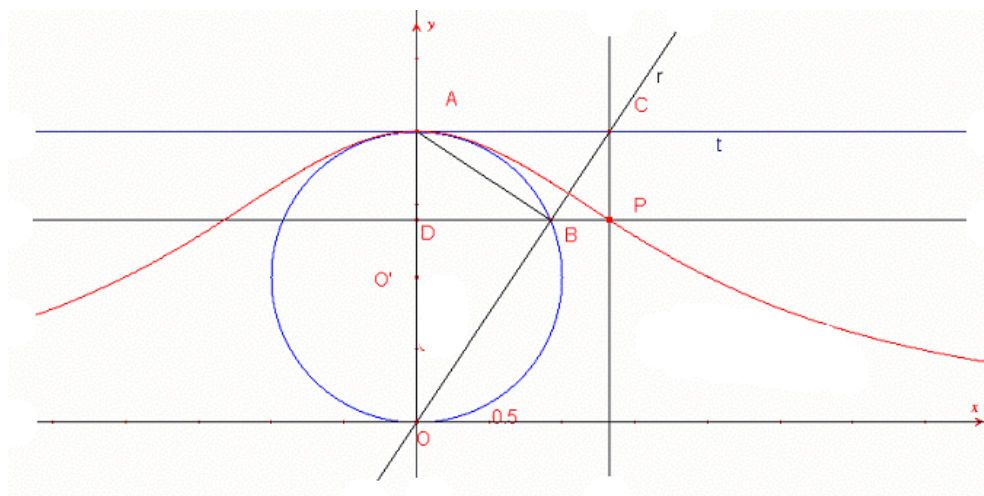
$$y'' = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^4} \geq 0$$

si ha $3x^2 - a^2 \geq 0 \quad x = \pm \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e quindi



Si hanno quindi due flessi $F_1\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}a\right); \quad F_2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}a\right)$

Il grafico è



4) L'area compresa fra la curva Γ e il suo asintoto orizzontale sarà

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} a^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_0^k$$

$$S = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

L'area del cerchio S_1 è

$$S_1 = \pi \frac{a^2}{4}$$

per cui l'area S è $4 \cdot S_1$