Soluzione problema n. 1

A cura dei Prof. Scimone A, Zanghì V

Le curve sono

$$\lambda : x^2 = 4(x-y) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

che è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, avente vertice in $V(2;1)$ e passante per l'origine.

$$r : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \qquad \text{che è una retta}$$

Punto 1

Per verificare che le due curve non hanno punti in comune, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

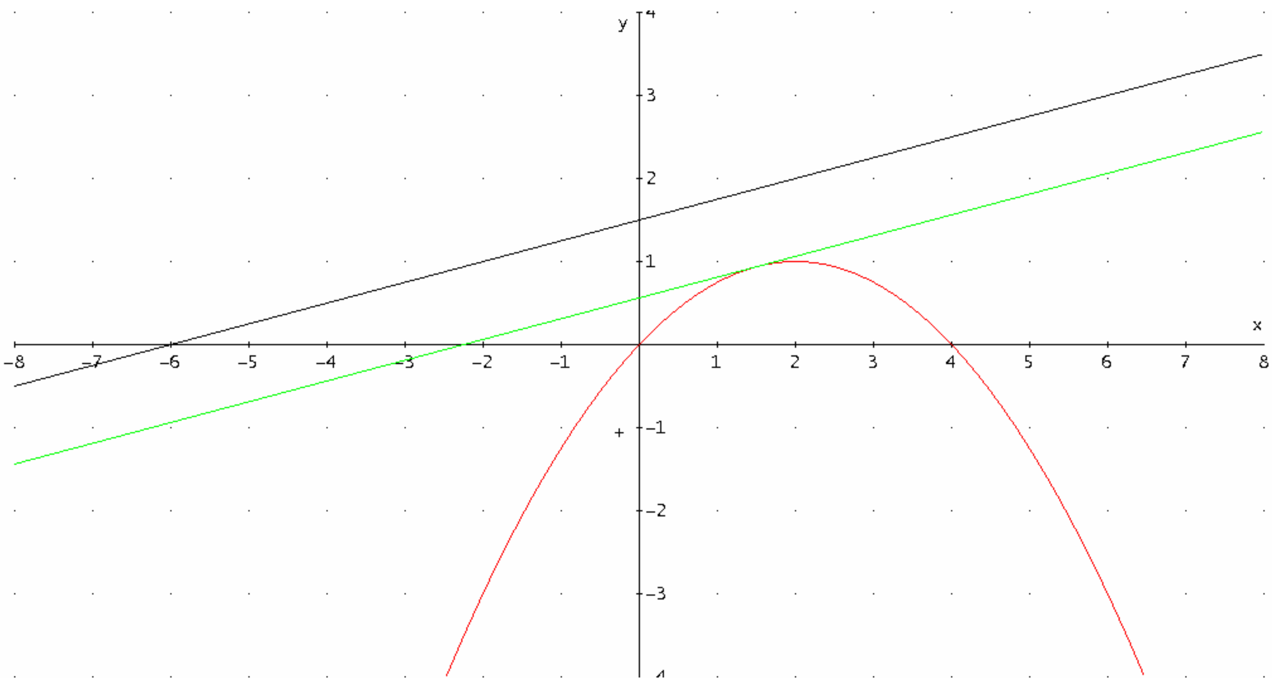
$$x^2 - 3x + 6 = 0$$

essendo

$$\Delta = 9 - 24 < 0$$

non vi sono soluzioni reali, quindo le due curve non hanno punti in comune.

Punto 2



Il punto $P(x_0; y_0) \in \lambda$ starà sulla retta parallela alla retta r e tangente alla parabola

Si ha

$$y'(x_0) = -\frac{1}{2}x_0 + 1$$

essendo $m = \frac{1}{4}$ avremo

$$-\frac{1}{2}x_0 + 1 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -2x_0 + 4 = 1 \qquad x_0 = \frac{3}{2}$$

l'ordinata di P sarà

$$y_0 = -\frac{9}{16} + \frac{3}{2} = \frac{15}{16} \quad \text{e quindi} \quad P\left(\frac{3}{2};\frac{15}{16}\right)$$

Punto 3

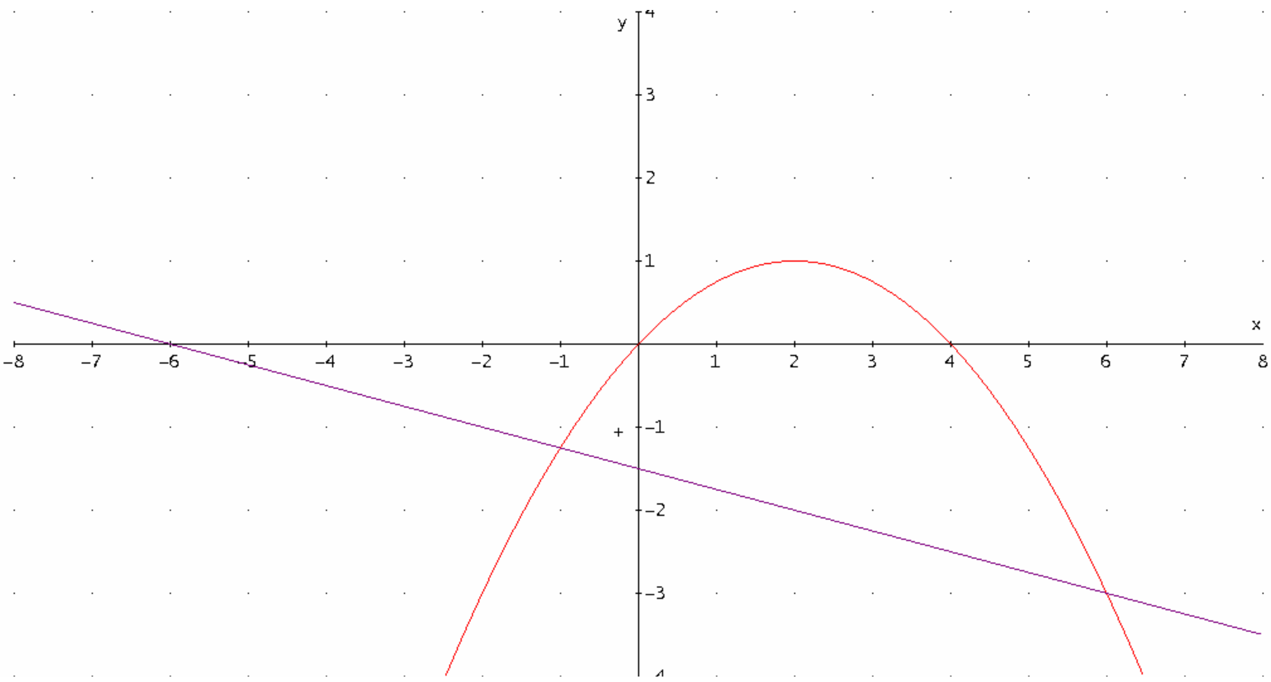
Le equazioni della simmetria rispetto all'asse x sono date da

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow -y \end{cases}$$

la retta s simmetrica della r rispetto all'asse x avrà equazione

$$s: -y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$s: y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$$



Per trovare i punti di intersezione tra la retta s e la parabola basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x = 0$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$
$$\Delta = 25 + 24 = 49$$
$$x = \frac{5 \pm 7}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1 \qquad x = 6$$

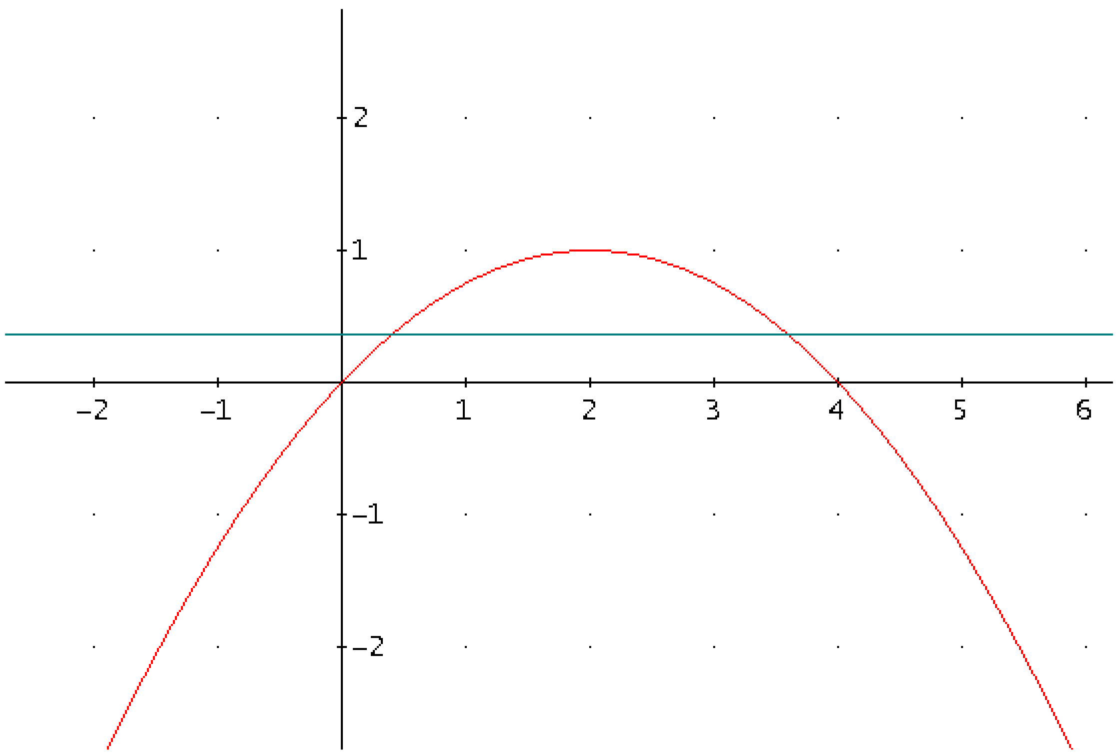
L'area della regione R compresa tra λ ed s si può trovare considerando il segmento parabolico

$$R = \frac{1}{6}\left|a(x_2 - x_1)^3\right|$$
$$R = \frac{1}{6}\left|-\frac{1}{4}(7)^3\right| = \frac{1}{6}\left|-\frac{343}{4}\right| = \frac{343}{4}$$

Punto 4

L'area della regione S del primo quadrante compresa fra λ e l'asse x sarà data da

$$S = \frac{1}{6}\left|-\frac{1}{4}64\right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$



consideriamo la retta $y = c$ e troviamo le intersezioni fra questa e la parabola

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = c \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x + c = 0$$

$$x^2 - 4x + 4c = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 4c \qquad \text{e quindi}$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{1-c} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 - 2\sqrt{1-c} \qquad x_2 = 2 + 2\sqrt{1-c}$$

L'area S_1 sarà quindi

$$S_1 = \frac{1}{6}\left| -\frac{1}{4}\left(2 + 2\sqrt{1-c} - 2 + 2\sqrt{1-c}\right)^3 \right| = \frac{1}{6}\left| -\frac{1}{4}\left(64\sqrt{(1-c)^3}\right)^3 \right| =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{(1-c)^3}$$

Avremo pertanto

$$\frac{8}{3}\sqrt{(1-c)^3} = \frac{4}{3}$$

$$(1-c)^3 = \frac{1}{4}$$

$$1 - c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cong 0,37$$

Punto 5

Dovendo essere quadrati le sezioni di S con piani ortogonali all'asse x, la base sarà y e l'area y^2, quindi

$$V = \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 \right) dx = \frac{32}{15}$$