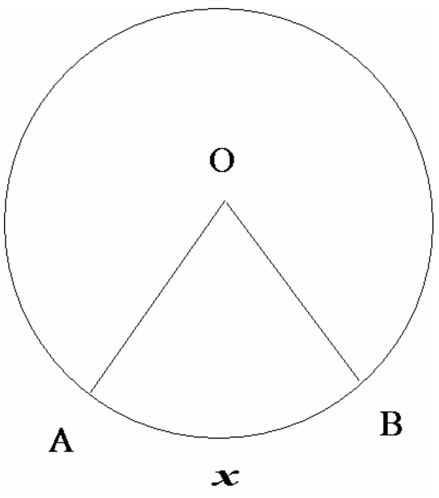
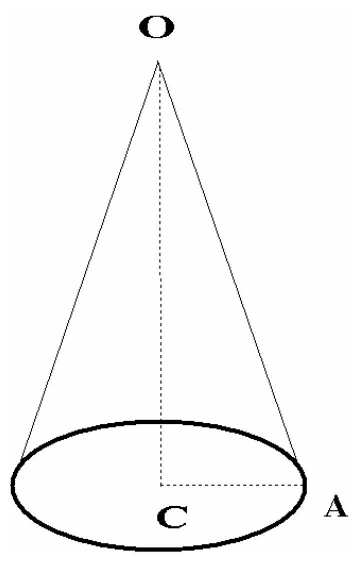


1) Poniamo $\overset{\frown}{AB} = x$ con $0 < x < 2\pi$ dove l'arco $\overset{\frown}{AB}$ è uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono



Indichiamo con R il raggio di base del cono; avremo

$x = 2\pi R$ da cui

$$R = \frac{x}{2\pi}$$

Inoltre l'apotema del cono sarà $OA = 1$, mentre l'altezza sarà $OC = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

Il volume del cono sarà:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ e quindi

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2}\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Determiniamo il volume massimo mediante il metodo della derivata prima.

$$V'(x)=\frac{1}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2-x^2}-\frac{2x^3}{2\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right)=\frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{2x\left(4\pi^2-x^2\right)-x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right)$$

$$V'(x)=\frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{8\pi^2x-3x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right)=\frac{1}{24\pi^2}\frac{2x}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}(8\pi^2-3x^2)$$

Ponendo

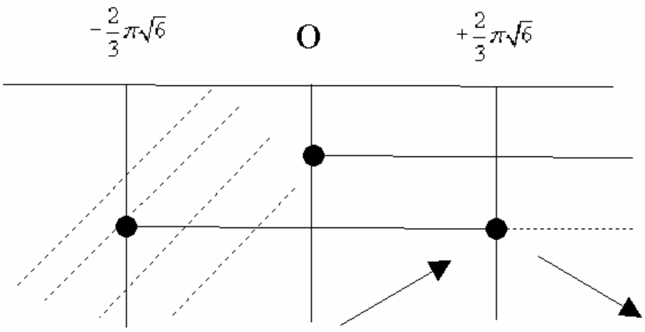
$V'(x)\geq 0$ otteniamo

$x\geq 0$ e $8\pi^2-3x^2\geq 0$

$3x^2-8\pi^2\leq 0$

$$x=\pm\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}$$

Si ha il grafico



Il volume è quindi massimo per

$$x=\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$$

Si ha quindi

$$V=\frac{2}{27}\pi\sqrt{3}$$

Essendo $\overset{\frown}{AB}=x$ avremo

$\overset{\frown}{AB}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$ che è uguale all'angolo al centro $A\hat{O}B$ misurato in radianti.

L'area del settore sarà:

$$S_{sett}=\frac{r^2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1)\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{6}$$

Essendo l'area del cerchio uguale a π, il rapporto percentuale fra l'area del settore e l'area del cerchio sarà

$$\frac{S_{sett}}{S_{cerchio}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\sqrt{6}}{\pi}=\frac{\sqrt{6}}{3}=81,64\%$$

Calcoliamo adesso il volume V' del secondo cono.

Il raggio di base sarà

$$R'=\frac{2\pi-x}{2\pi}\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}\right)\frac{1}{2\pi}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

L'altezza del cono V' sarà

$$h'=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{1-1-\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2}{3}}$$

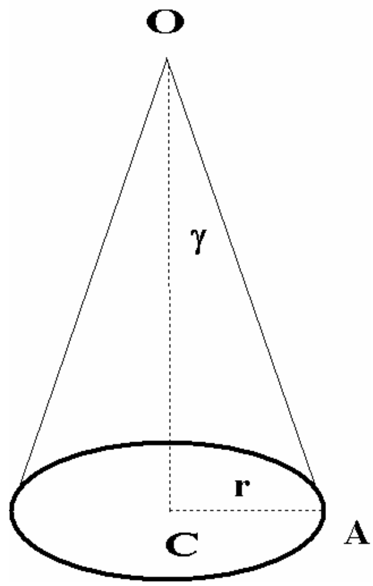
Otteniamo quindi

$$V'=\frac{1}{3}\pi R'^2\,h'=\frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2}{3}}$$

2) La capacità complessiva dei due coni, espressa il litri, dove $1m^3=10^3 l$ sarà

$$C=(V+V')10^3$$

3)



Dal triangolo rettangolo OCA si ha $r=OA\sin\gamma$ e quindi

$$\sin\gamma=\frac{R}{OA}\quad\text{dove}\quad R=\frac{x}{2\pi}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

otteniamo

$$\sin\gamma=\frac{\sqrt{6}}{3}=0,816496$$

$\gamma=54,74^\circ$ (valore trovato con la calcolatrice)

Risolvendo l'equazione $\sin x-\frac{\sqrt{6}}{3}=0$ vediamo che $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi l'angolo sarà compreso tra $45<x<60$.

Usiamo adesso un metodo numerico (metodo di bisezione) che è possibile applicare in quanto $f(a)f(b)<0$.

Si ha con una approssimazione ai centesimi

	a	b	$\frac{a+b}{2}$	F(a)	F(b)	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
1	45,0	60,0	52,5	−0,10939	0,04953	−0,02314
2	52,5	60,0	56,25	−0,02314	0,04953	0,01497
3	52,5	56,25	54,3750	−0,02314	0,01497	−0,00365
4	54,3750	56,25	55,3125	−0,00365	0,01497	0,0577
5	54,3750	55,3125	54,8438	−0,00365	0,0577	0,00109
6	54,3750	54,8438	54,6094	−0,00365	0,00109	−0,00127
7	54,6094	54,8438	54,7266	−0,00127	0,00109	−0,00009
8	54,7266	54,8438	54,7852	−0,00009	0,00109	0,0005
9	54,7266	54,7852	54,7559	−0,00009	0,0005	0,0002
10	54,7266	54,7559	54,7412	−0,00009	0,0002	0,00006
11	54,7266	54,7412	54,7339	−0,00009	0,00006	−0,00002
12	54,7339	54,7412		−0,00002	0,00006	

Pertanto l'angolo x sarà compreso tra

$$54{,}7339^\circ < x < 54{,}7412^\circ$$