Problema 2 PNI

Affinché la funzione sia pari deve essere

$$f(x) = f(-x)$$
$$a\cdot 2^{x} + b\cdot 2^{-x} + \cancel{c} = a\cdot 2^{-x} + b\cdot 2^{x} + \cancel{c} \qquad \text{cioè}$$
$$a\cdot\left(2^{x} - 2^{-x}\right) = b\cdot\left(2^{x} - 2^{-x}\right) \qquad \Rightarrow \quad a = b$$

***f*(0) = 2**

$$a + b + c = 2$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2\ln 2}$$
$$\int_0^1 \left(a\cdot 2^{x} + b\cdot 2^{-x} + c\right)dx = \left[\frac{a\cdot 2^{x}}{\ln 2} + \frac{b\cdot 2^{-x}}{\ln 2} + cx\right]_0^1 = \frac{2a}{\ln 2} - \frac{b}{2\ln 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{\ln 2}$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2 - 2a \\ \dfrac{2a}{\ln 2} - \dfrac{b}{2\ln 2} + c - \dfrac{a}{\ln 2} + \dfrac{b}{\ln 2} = \dfrac{3}{2\ln 2} \end{cases} \qquad \text{cioè}$$

$$\frac{3a}{2\ln 2} + c = \frac{3}{2\ln 2}$$
$$c = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{3a}{2\ln 2} \qquad \text{essendo } c = 2 - 2a \qquad \text{avremo}$$
$$2 - 2a = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{3a}{2\ln 2}$$
$$2 - \frac{3}{2\ln 2} = \left(2 - \frac{3}{2\ln 2}\right)a \qquad \text{e quindi}$$
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo la funzione

$$g(x) = 2^{x} + 2^{-x}$$

Studio della funzione

$\operatorname{dom} g(x) = \left]-\infty; +\infty\right[$

la funzione è pari, quindi l'asse y è l'asse di simmetria

per $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$ interseca quindi l'asse y nel punto $(0;2)$ e non interseca l'asse x.

La funzione è sempre positiva.

Condizioni agli estremi dell'insieme di esistenza $\lim_{x \to \pm\infty} 2^x + 2^{-x} = +\infty$

inoltre essendo

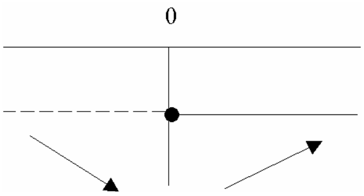
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^H = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2\right) = +\infty$$

non si hanno asintoti obliqui

Studio della derivata prima

$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \ln 2\left(2^x - 2^{-x}\right) \geq 0$ e quindi

$2^x - 2^{-x} \geq 0$ da cui $x \geq 0$ si ha il grafico



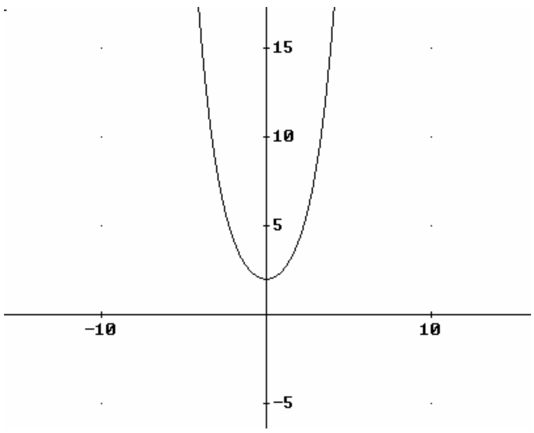
per $x = 0$ si ha un minimo $g(0) = 2 \Rightarrow m(0;2)$

Studio della derivata seconda

$g''(x) = \ln 2\left(2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2\right) = \ln^2 2\left(2^x + 2^{-x}\right) \geq 0$ cioè

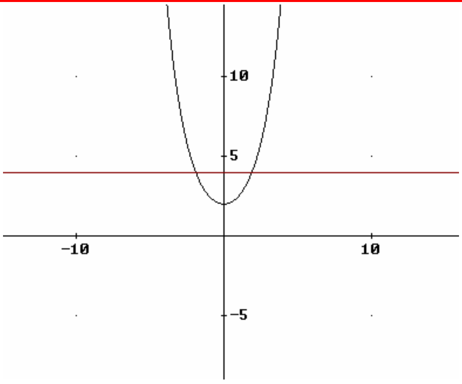
$2^x + 2^{-x} \geq 0$

quindi risulta sempre positiva per cui la $g(x)$ volge la concavità verso l'alto. Si ha il grafico



Si ha

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = 2^x + 2^{-x} \end{cases}$$ e quindi



$2^x + 2^{-x} = 4 \qquad 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \qquad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \qquad 2^x = 2 \pm \sqrt{3}$ da cui

$x = \log_2 \left(2 \pm \sqrt{3}\right) \cong 1,89$

Indichiamo con $\pm\alpha$ le ascisse dei punti in cui la curva incontra la retta.
Usando il metodo di bisezione avremo

$\varphi(1) = 2 + \frac{1}{2} - 4 = \frac{4+1-8}{2} = -\frac{3}{2} \cong -0,81$

$\varphi(2) = 4 + \frac{1}{4} - 4 = \frac{1}{4} = 0,25$ per cui

$1 < \alpha < 2$ si ha

$x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = -0,81$ per cui

$\frac{3}{2} < \alpha < 2$

$x_2 = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4} = 1,75$

$\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = -0,33$ per cui

$\frac{7}{4} < \alpha < 2$ ecc.

avremo quindi
$1,75 < \alpha < 2$ e per simmetria $-2 < \alpha < -1,75$

(non è chiara l'utilità di usare il metodo iterativo)

L'area racchiusa tra $r: y = 4$ **e G** è data da

$$S = 2\int_0^\alpha 4 - \left(2^x + 2^{-x}\right) dx = 2\left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^\alpha = 2\left(4\alpha - \frac{2^\alpha}{\ln 2} + \frac{2^{-\alpha}}{\ln 2}\right) \cong 5,20$$

$$I = \int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{2^x + 2^{-x}} dx = \int \frac{2^x}{2^{2x}+1} dx$$

ponendo $2^x = t$ avremo $2^x \ln 2 \cdot dx = dt$ $2^x \cdot dx = \dfrac{dt}{\ln 2}$ e quindi

$$I = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} 2^x + c$$

La simmetria rispetto alla retta $y = 4$ ha equazioni

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \to x \\ y \to 8 - y \end{cases}$ avremo pertanto

$$8 - y = 2^x + 2^{-x}$$

e quindi

$$g'(x) = y = 8 - 2^x - 2^{-x}$$

Il grafico richiesto è