Problema 2

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x \qquad a,b \neq 0$$

punto 1

Il dominio della funzione è $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$. Si ha

$$f(a) = \sin\pi\cos\frac{a\pi}{2b} + a = a$$

$$f(a) = \sin\frac{\pi b}{a}\cos\frac{\pi}{2} + b = b$$

Essendo la funzione continua in $\mathbb{R}$, assumerà, per il teorema dei valori intermedi, tutti i valori reali compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$ e quindi anche il valore

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

punto 2

Ponendo $a = 2b = 2$ otteniamo

$$g(x) = \sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x + x$$ che si può scrivere

$$g(x) = \frac{1}{2}2\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x + x$$ per le formule di duplicazione degli archi otteniamo

$$g(x) = \frac{1}{2}\sin\pi x + x$$

la funzione g risulta la somma di due funzioni $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sin\pi x$ periodica di periodo 2 e $\psi(x) = x$

Inoltre $\mathrm{dom}\, g(x) = \mathbb{R}$

Intersezione con gli assi

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

quindi interseca gli assi nell'origine

condizione agli estremi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}\sin\pi x + x\right) = \pm\infty$$

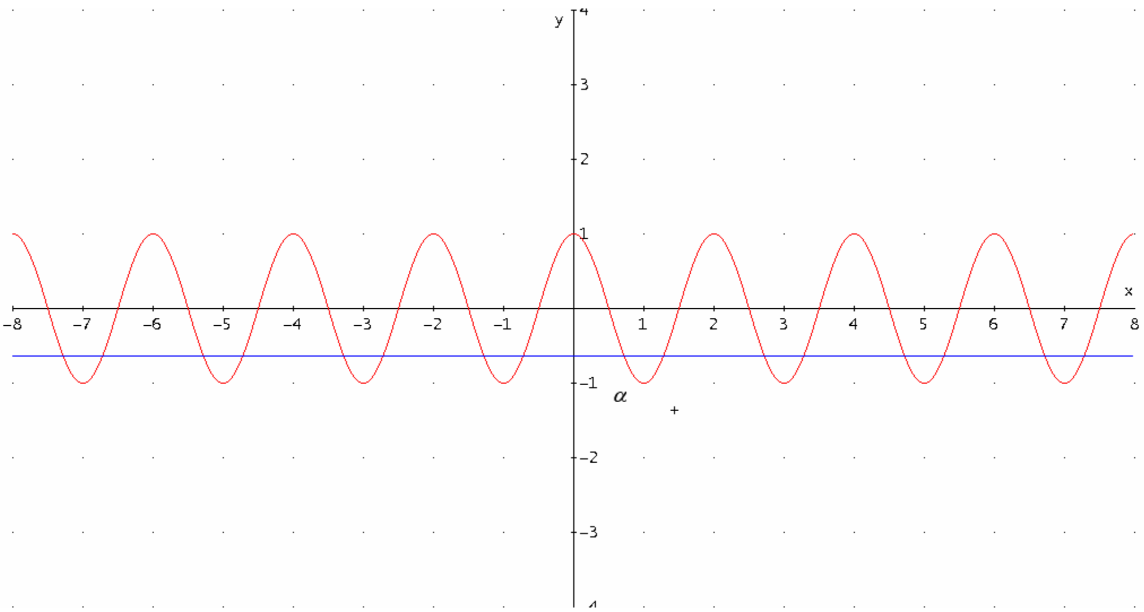
la funzione non ammette asintoti né orizzontali, né obliqui

studio della derivata prima

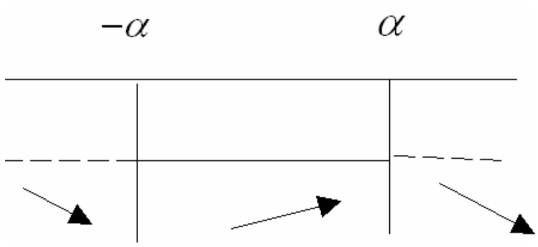
$$y' = \frac{1}{2}\pi\cos\pi x + 1 \geq 0$$ si ha quindi

$$\cos\pi x \geq -\frac{2}{\pi}$$

risolvendo la disequazione con il metodo grafico avremo



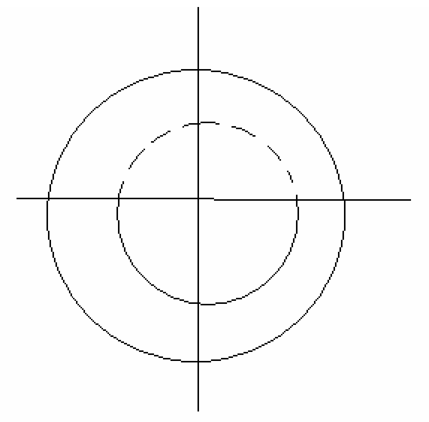
con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$



la funzione ammette massimi per $x = \alpha + 2k$ e minimi per $x = -\alpha + 2k$

studio del segno della derivata seconda

$y'' = -\frac{1}{2}\pi^2 \sin \pi x \geq 0$ cioè per $\sin \pi x \geq 0$

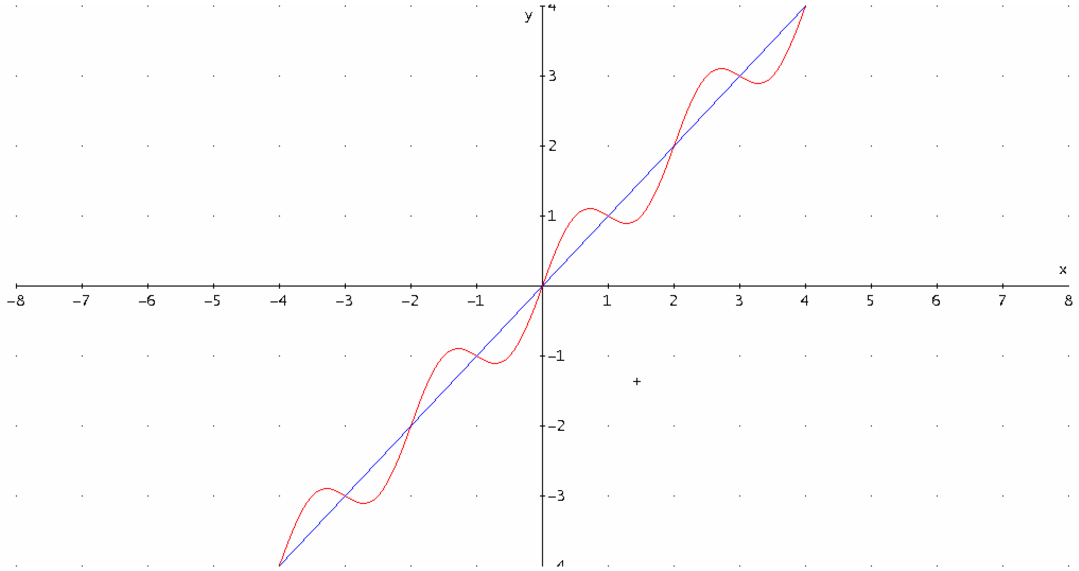


avremo pertanto

$\pi + 2k < \pi x < 2\pi + 2k$ e quindi $1 + 2k < x < 2 + 2k$

i flessi si otterranno per $x = 1 + 2k$ e per $x = 2 + 2k$

il grafico dalla funzione sarà



punto 3

per $x > 0$ il primo punto di massimo si avrà per $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

consideriamo la funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\pi\cos\pi x + 1$$

avremo, usando il metodo di bisezione

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -0{,}11 < 0 \qquad \text{per } a = \frac{1}{2} \quad b = 1$$

quindi $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ $\quad 0{,}5 < \alpha < 0{,}75$

per $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{4}$ avremo

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{5}{8}\right) = 0{,}4 > 0 \quad \text{quindi } \frac{5}{8} < \alpha < \frac{3}{4} \qquad 0{,}625 < \alpha < 0{,}75$$

per $a = \frac{5}{8}$ e $b = \frac{3}{4}$ avremo

$$f\left(\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{11}{16}\right) = 0{,}13 > 0 \quad \text{quindi } \frac{11}{16} < \alpha < \frac{3}{4} \qquad 0{,}6875 < \alpha < 0{,}75$$

per cui possiamo ritenere che il valore di α sia $\alpha = 0{,}7$