Quesito 1 Liceo Scientifico Tradizionale

Abbiamo:

$$\int_0^1 f(x)dx = 2 \qquad \int_0^2 f(x)dx = -5$$

a)Per quanto riguarda i primi tre integrali, basta effettuare la sostituzione

$\frac{x}{2} = t$ e differenziano di ottiene

$x = 2t \quad \Rightarrow \quad dx = 2dt$

- $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$

Pertanto l'integrale

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)2dt$ non può essere calcolato dalla conoscenza delle condizioni [1].

- $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 f(t)2dt = 2\int_0^1 f(t)\,dt = 2 \cdot 2 = 4$
- $\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_1^2 f(t)2dt = 2\left(\int_1^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt\right) =$

$$= 2\left(-\int_0^1 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt\right) = -4 - 10 = -14$$

- $\int_0^1 f(2x)dx$ Per questo integrale effettuiamo la sostituzione

$2x = t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$

e quindi:

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \\ x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = -\frac{5}{2}$$

b) Sia $f(x) = ax^3 + bx + c$ con $a \neq 0$

Imponendo che f(x) soddisfi le condizioni [1] si ha

$$\int_0^1 (ax^3 + bx + c)dx = 2 \qquad \int_0^2 (ax^3 + bx + c)dx = -5 \qquad \text{e quindi}$$

$$\left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right]_0^1 = 2 \qquad \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right]_0^2 = -5$$

Avremo quindi il sistema

$$\begin{cases} a+2b+c=8 \\ 4a+2b+2c=-5 \end{cases}$$

che risolviamo rispetto all'incognita a.

$$c=\frac{8-a-2b}{4}$$

$$4a+2b+\frac{8-a-2b}{2}=-5$$

e quindi

$$b=\frac{-7a-18}{2} \qquad c=\frac{3a+13}{2}$$

avremo:

$$y=f(x)=ax^3-\frac{7a+18}{2}x+\frac{3a+13}{2}$$

c) $y'=3ax^2-\frac{7a+18}{2}$

$$y''=6ax$$

Per $x=0$ si ha il flesso della cubica

$$F\left(0;\frac{3a+13}{2}\right)$$

Per verificare che la curva è simmetrica rispetto ad F, basta usare la simmetria rispetto ad un punto.

$$\begin{cases} x\to 2x_0-x \\ y\to 2y_0-y \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x\to -x \\ y\to 3a+13-y \end{cases}$$

Avremo quindi:

$$-ax^3+\frac{7a+18}{2}x+\frac{3a+13}{2}=3a+13-y \quad \text{cioè}$$

$$y=f(x)=ax^3-\frac{7a+18}{2}x+\frac{3a+13}{2}$$

d)essendo

$$F(0;-4)$$

avremo:

$$\frac{3a+13}{2}=-4$$

da cui

$a=-7$. La curva avrà equazione:

$$y=-7x^3+\frac{31}{2}x-4$$

e)Risulta

$y' = 0$

$3ax^2 - \frac{7a+18}{2} = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{7a+18}{2}}$

cioè si hanno estremanti per

$\frac{7a+18}{2} \geq 0$

cioè

$a \geq 0 \quad \vee \quad a \leq -\frac{18}{7}$