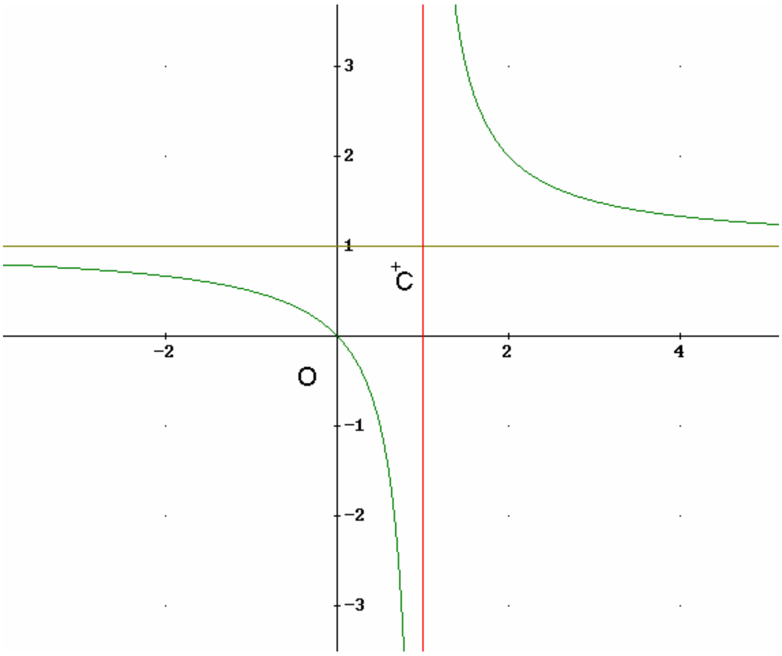
SOLUZIONE PROBLEMA1 2001

a) Posto $x, y, a \neq 0$ otteniamo

$$y = \frac{ax}{x-a} \qquad \text{con } a > 0$$

$$domf =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$$

La funzione rappresenta una famiglia di iperboli equilatere traslate passanti per l'origine degli assi, aventi centro nel punto $C(a;a)$, asintoto orizzontale la retta $y = a$ e asintoto verticale la retta $x = a$.



b) Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax}{x-a} \\ x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \end{cases}$$

otteniamo

$$4 - x = \frac{ax}{x-a}$$

e quindi

$$x^2 - 4x + 4a = 0$$

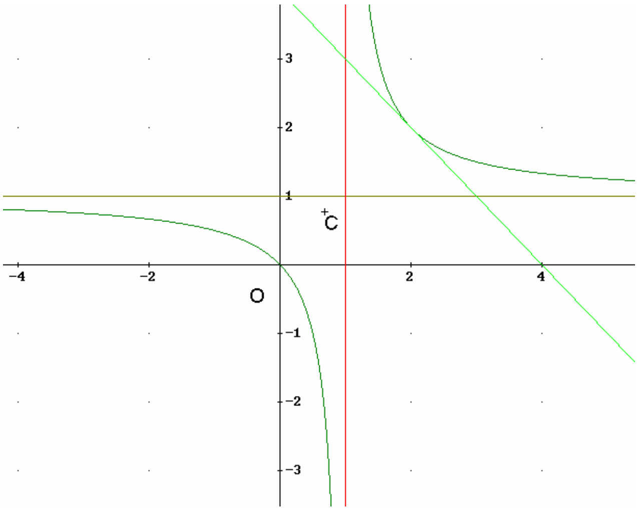
Imponendo la condizione di tangenza

$$\frac{\Delta}{4} = 0$$

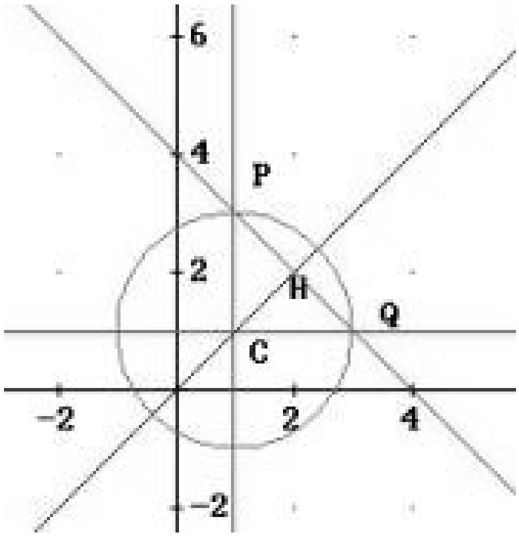
avremo

$$4 - 4a \geq 0$$
$$a \leq 1$$

La retta risulta tangente per $a = 1$ e secante per $0 < a < 1$



c)



La distanza del centro della circonferenza dalla retta t è

$$d(C;t)=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

per cui il triangolo PCQ è rettangolo isoscele.
Il raggio della circonferenza sarà

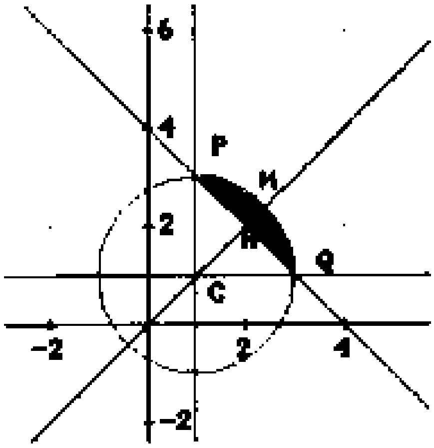
$$CP=CQ=\sqrt{2+2}=2$$

L'equazione della circonferenza k risulta:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \qquad \text{cioè}$$

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

d)



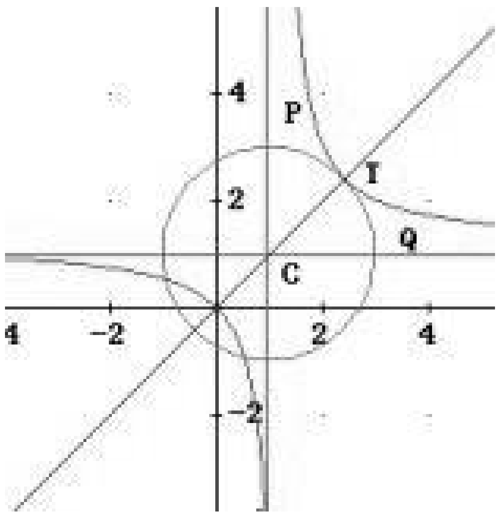
L'area del segmento circolare avente area minore si può calcolare come differenza tra l'area del settore circolare CQMP e quella del triangolo CQP. Si ha:

$$S_1 = \frac{1}{4}4\pi - \frac{1}{2}4 = \pi - 2$$

L'area del segmento circolare avente area maggiore sarà data dalla differenza tra l'area del cerchio e l'area S_1.

$$S_2 = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi - 2$$

e) Poiché la retta $y = x$ è l'asse di simmetria dell'iperbole e il centro della circonferenza appartiene alla retta, il punto di tangenza tra le due curve apparterrà a questa retta, per cui basta risolvere il sistema tra la circonferenza e la retta. Si ha:



$$\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$2(x-1)^2 = 4$$
$$(x-1)^2 = 2$$
$$x-1 = \pm\sqrt{2}$$
$$x = 1-\sqrt{2}$$
$$x = 1+\sqrt{2}$$

La soluzione $x = 1-\sqrt{2}$ non è accettabile perché da come soluzione $a < 0$.

Otteniamo pertanto il punto $A\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$. Poiché il punto A deve appartenere all'iperbole avremo:

$$1+\sqrt{2} = \frac{a\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}-a}$$

e quindi

$$a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$