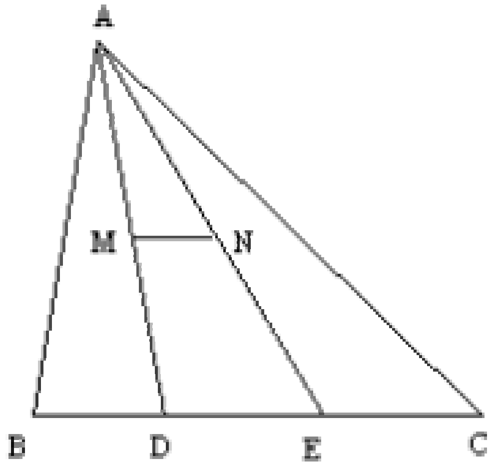
SOLUZIONE PROBLEMA2 2001

a)



Essendo $BD = DE = EC$ i triangoli ABD, ADE, AEC sono equivalenti perché hanno la medesima altezza relativa alle basi uguali. Avremo quindi:

$$S(ADE) = \frac{1}{3} S(ABC)$$

Il segmento $\overline{MN}$ che congiunge i punti medi dei lati AD ed AE è parallelo al terzo lato DE ed ha lunghezza pari alla metà di esso.
L'altezza del triangolo AMN relativa alla base MN è la metà di quella del triangolo ADE perché il attorto di similitudine è $\frac{1}{2}$.

$$h' = \frac{1}{2} h$$

Avremo pertanto:

$$S(AMN) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{DE}\right)\frac{1}{2} h = \frac{1}{4} S(ADE)$$

L'area del quadrilatero DEMN (trapezio) sarà

$$S(DEMN) = S(ADE) - \frac{1}{4} S(ADE) = \frac{3}{4} S(ADE)$$

essendo

$$S(ADE) = \frac{1}{3} S(ABC)$$

avremo

$$S(DEMN) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} S(ABC) = \frac{1}{4} S(ABC)$$

b) Si ha

$$S(DEMN) = \frac{45}{2} a^2 \quad \text{avremo}$$

$$S(ABC) = 90a^2$$

e quindi, indicando con AH l'altezza del triangolo ABC otteniamo

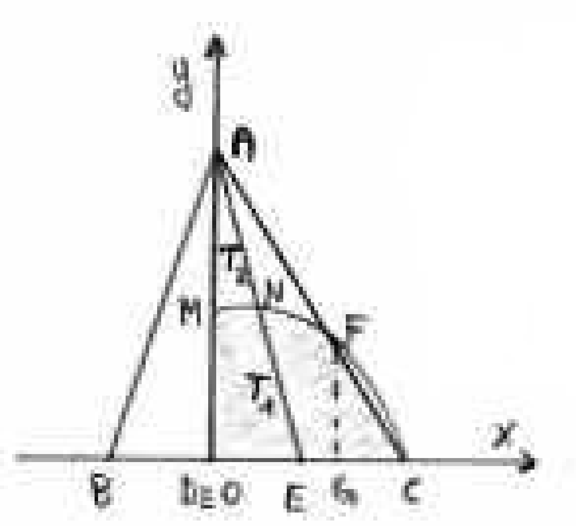
$$AH = 12a$$

Il triangolo ABH è rettangolo per cui

$$BH = \sqrt{(AB)^2 - (AH)^2} = \sqrt{(13a)^2 - (12a)^2} = 5a$$

che coincide con BD.
Siccome i numeri $5a;12a;13a$ costituiscono una terna pitagorica, il triangolo ADE è rettangolo in D ed il quadrilatero DEMN è un trapezio rettangolo.

c)



Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente come origine $D \equiv O$ e come unità di misura a = 1. Con questa scelta avremo:

$$A(0;12);\ B(-5;0);\ C(10;0);\ D(0;0);\ M(0;6);\ N\left(\frac{5}{2};6\right)$$

La parabola avrà equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponendo il passaggio per i punti M, N, e C otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 6 = c \\ 6 = \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c \\ 0 = 100a + 10b + c \end{cases}$$

essendo c = 6 otteniamo

$$\begin{cases} 25a + 10b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{2}a \\ 50a + 5b + 3 = 0 \end{cases}$$

$$50a - \frac{25}{2}a + 3 = 0$$

$$75a + 6 = 0$$

$a = -\frac{2}{25}$

$b = \frac{1}{5}$

l'equazione della parabola è

$y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x + 6$

d) Intersecando la parabola con la retta AC la cui equazione è

$y = -\frac{6}{5}x + 12$

avremo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x + 6 \\ y = -\frac{6}{5}x + 12 \end{cases}$$

e quindi

$-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x + 6 = -\frac{6}{5}x + 12$

$-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}x - 6 = 0$

$2x^2 - 35x + 150 = 0$

$\Delta = 1225 - 1200 = 25$

$x = \frac{35 \pm 5}{4}$

$x = \frac{15}{2}$

Il punto di intersezione sarà $F\left(\frac{15}{2};3\right)$

Per trovare l'area T_2 della regione AMNF basta risolvere l'integrale

$$T_2 = \int_0^{\frac{15}{2}} \left(-\frac{6}{5}x + 12 + \frac{2}{25}x^2 - \frac{1}{5}x - 6\right)dx = \int_0^{\frac{15}{2}} \left(\frac{2}{25}x^2 - \frac{7}{5}x + 6\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2}{75}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + 6x\right]_0^{\frac{15}{2}} = \ldots = \frac{135}{8}$$

L'area T_1 della regione MFCD si ottiene per differenza fra l'area del triangolo ADC e l'rea T_2 trovata.

$T_1 = \frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{DA} - T_2$

$T_1 = \frac{1}{2}10 \cdot 12 - \frac{135}{8} = 60 - \frac{135}{8} = \frac{345}{8}$