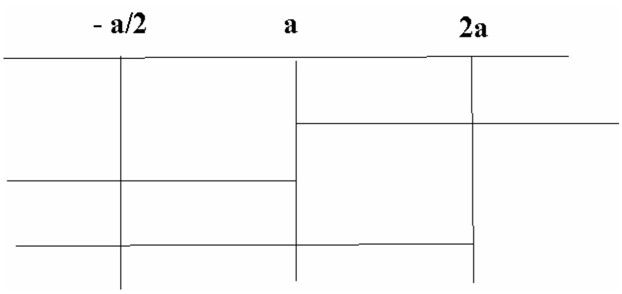
Consideriamo le lunghezze dei segmenti

$a+2x \qquad a-x \qquad 2a-x$

a) Se le lunghezze date devono essere i lati di un triangolo non degenere, dovrà essere $a>0$, $x \geq 0$. Inoltre il lato minore sarà $a-x$ ed il maggiore $a+2x$.
Poiché i lati devono essere positivi si ha

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-\dfrac{a}{2} \\ x<a \\ x<2a \end{cases}$$

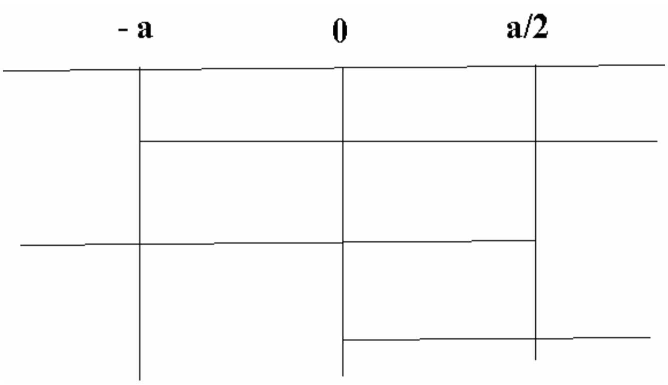


la soluzione sarà

$$-\frac{a}{2}<x<a \qquad (1)$$

Applicando il teorema delle disuguaglianze triangolari (ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a+2x<a-x+2a-x \\ a-x<a+2x+2a-x \\ 2a-x<a+2x+a-x \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{a}{2} \\ x<-a \\ x>0 \end{cases}$$



e quindi

$$0<x<\frac{a}{2} \qquad (2)$$

Dovendo essere verificate le (1) e le (2), otteniamo un triangolo non degenere se

$$0 < x < \frac{a}{2}.$$

b) Calcoliamo l'area del triangolo utilizzando la formula di Erone. Si ha:

$$2p = a + 2x + a - x + 2a - x = 4a$$

dalla quale si evince che i triangolo hanno perimetro costante al variare di x

L'area S sarà

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e quindi

$$S = \sqrt{2a(2a-a-2x)(2a-a+x)(2a-2a+x)}$$

$$S = \sqrt{2ax(a-2x)(a+x)}$$

L'area sarà massima quando il radicando sarà massimo e minima quando il radicando sarà minimo.

Poniamo

$$y = 2ax(a-2x)(a+x)$$

calcoliamo la derivata prima

$$y' = 2a\left[(a-2x)(a+x) + x(-2)(a+x) + x(a-2x)\right]$$

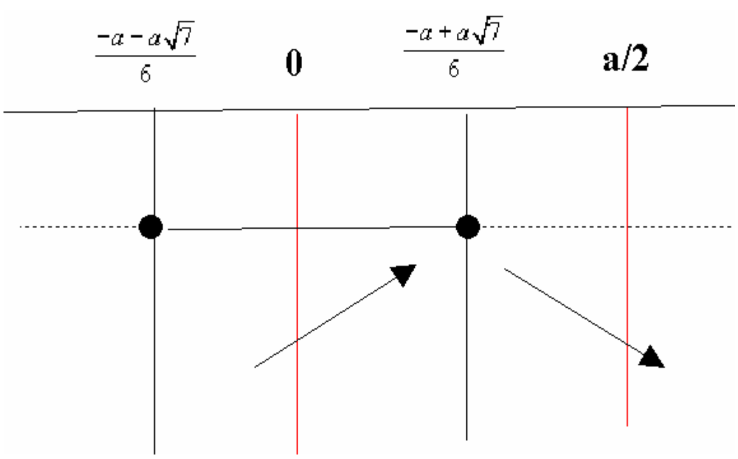
$$y' = -2a(6x^2 + 2ax - a^2)$$

e quindi

$$6x^2 + 2ax - a^2 \le 0$$

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{7}}{6}$$

Si ha il grafico



Pertanto per

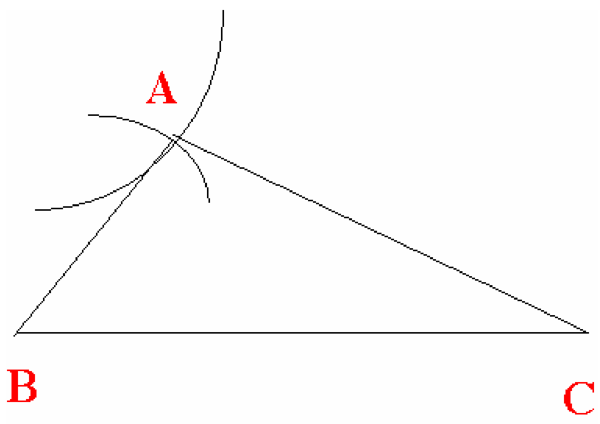
$$x = \frac{a\left(\sqrt{7}-1\right)}{6}$$

l'area è massima e non esiste alcun valore per cui l'area risulti minima.

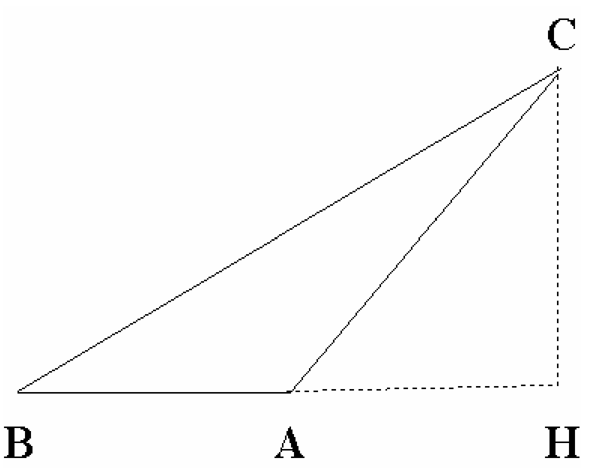
c) Per $x = \frac{a}{4}$, essendo $0 < \frac{a}{4} < \frac{a}{2}$, otteniamo un triangolo non degenere i cui lati sono

$BC = \frac{7}{4}a \qquad AC = \frac{3}{2}a \qquad AB = \frac{3}{4}a$

la costruzione del triangolo può essere effettuata mediante l'uso di riga e compasso osservando che i lati del triangolo sono proporzionali ai numeri 7, 6, 3.
Quindi avremo $BC = 7u \qquad AC = 6u \qquad AB = 3u$
Tracciamo il segmento $BC = 7u$ e con il compasso in B costruiamo un arco di raggio $3u$. Col compasso in C costruiamo un arco di raggio $6u$. Il terzo vertice A sarà il punto di intersezione dei due archi.



Primo metodo
Il triangolo ABC è ottusangolo, infatti applicando il teorema di Pitagora generalizzatoavremo:
Se il triangolo ABC è ottusangolo si ha:



$$(AC)^2 + (AB)^2 = (CB)^2 - 2(AB)(AH)$$

e quindi

$$(AC)^2 + (AB)^2 < (CB)^2$$

Sostituendo otteniamo:

$$\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{45}{16}a^2$$

$$\frac{45}{16}a^2 < \frac{49}{16}a^2$$

per cui il triangolo è ottusangolo.

Secondo metodo

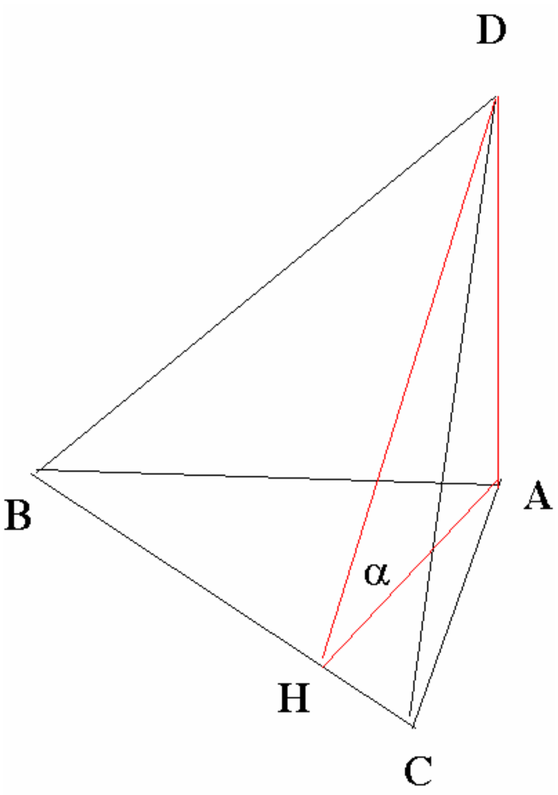
Applicando il teorema del coseno si ha:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos(B\hat{A}C)$$

e quindi

$$\cos(B\hat{A}C) = \frac{\frac{9}{16}a^2 + \frac{36}{16}a^2 - \frac{49}{16}a^2}{2\frac{3}{4}a\frac{3}{2}a} = -\frac{1}{9}$$

da cui si evince che l'angolo è ottuso.



Conduciamo per A la perpendicolare al piano del triangolo e prendiamo su di esso un punto D tale che $AD = a$.

L'altezza AH del triangolo ABC relativa al lato BC sarà data da

$$AH = \frac{2S(ABC)}{BC}$$

essendo

$$S(ABC) = \sqrt{2a\frac{1}{4}a\frac{5}{4}a\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$$

otteniamo

$$AH = \frac{2\sqrt{5}}{4}a^2\frac{4}{7a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a$$

Considerando il triangolo rettangolo DAH, essendo

$$AD = AH \operatorname{tg}\alpha$$

avremo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{AH} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{5}}{7}a} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \cong 1,565...$$

e quindi

$$\alpha = 57,42^0$$

Pertanto l'angolo sarà

$$57^0 < \alpha < 58^0$$