Quesito 9

Consideriamo la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x\cos \pi x$$

Si ha:

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(4) = F'(4) \qquad (1)$$

Per il teorema di Torricelli Barrow otteniamo

$F'(x) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$ e per la (1)

$$f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1$$

Quesito 10

Similitudine

Definizione - Si chiama similitudine piana una biiezione φ di $\mathbf{R}^2$ in se stesso che moltiplica per k le distanze, cioè

$$d(P',Q') = k\, d(P,Q) \quad \forall P,Q \in \mathbf{R}^2 \qquad (1)$$

con $P' = \varphi(P),\ Q' = \varphi(Q)$

e dove k è un numero reale positivo, per cui :
In una similitudine il rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti è costante.
La costante k > 0 prende il nome di rapporto o costante di similitudine.

Definizione - Si dice che una similitudine è concorde se trasforma una figura F in un'altra F', i cui vertici si susseguono nello stesso senso con cui si succedono in F ; altrimenti la similitudine si dice inversa o discorde.
Per cui una similitudine concorde ha equazioni della forma

$$\varphi\colon \begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x + a_{11}y + q \end{cases}$$

invece una similitudine discorde ha equazioni della forma

$$\varphi\colon \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x - a_{11}y + q \end{cases}$$

Si dimostra inoltre che una similitudine trasforma

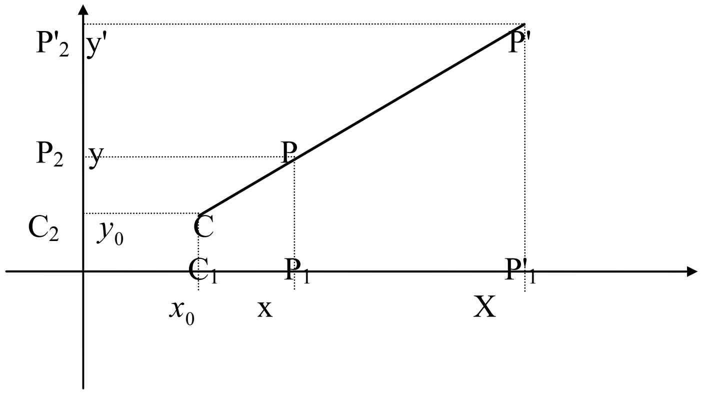
- punti susseguentisi in punti susseguentisi
- rette in rette
- segmenti in segmenti
- semipiani in semipiani
- angoli in angoli di eguale ampiezza
- aree in aree di rapporto k^2 *(ossia* $S' = k^2 S$*)*
- cerchi in cerchi
- ellissi in ellissi

Inoltre in una similitudine è costante il rapporto fra segmenti corrispondenti. In particolare la similitudine muta rette perpendicolari in rette perpendicolari.

omotetia

Definizione 1 - Si chiama omotetia di centro $C(x_0, y_0)$ ogni trasformazione biunivoca del piano in se in cui due punti corrispondenti sono allineati con il centro C e alla retta PQ corrisponde una retta parallela P'Q' e tale che sia uguale a $k \neq 0$ il rapporto tra i segmenti orientati CP' e CP. La trasformazione associa quindi ad ogni punto $P(x, y)$ il punto $P'(x', y')$ allineato con C, tale che sia k il rapporto fra i segmenti orientati

$$k = \frac{CP'}{CP}$$



Per il Teorema di Talete, si ha

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = k$$

per cui si ha

$$\varphi : \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$$

e quindi

$$\varphi : \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases} \qquad (1)$$

con

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2$$

Il punto $C(x_0, y_0)$ è il punto unito della trasformazione e si chiama centro dell'omotetia ; ogni retta passante per C viene trasformata in se stessa : è perciò una retta unita.

Dicesi affinità omologica ogni affinità avente una retta luogo di punti fissi (asse) tale che le congiungenti punti corrispondenti sono tra loro parallele (direzione) e rette corrispondenti si intersecano sull'asse.

L'affinità omologica si dirà ortogonale se la sua direzione è perpendicolare all'asse.

Teorema - Ogni omotetia è una similitudine di rapporto $|k|$;

se $|k| > 1$ si ha una dilatazione ;

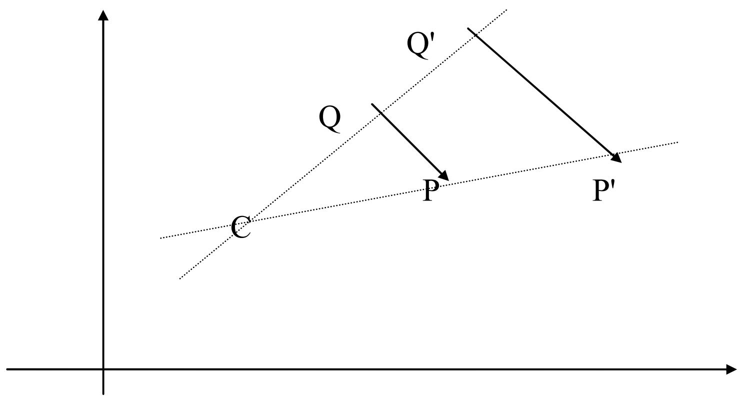
se $0 < |k| < 1$ si ha una contrazione

se $k = 1$ si ha l'identità

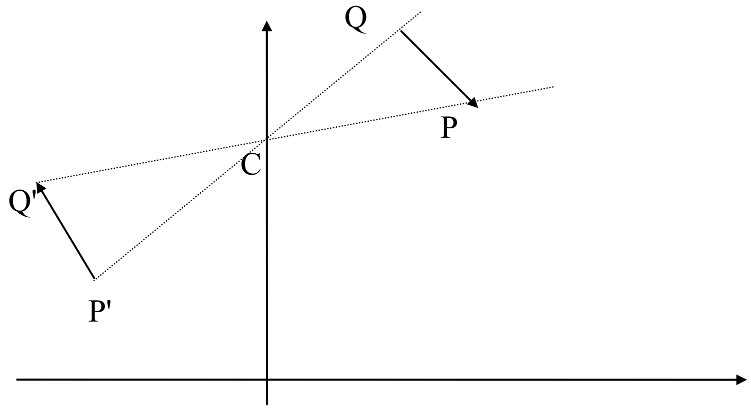
se $k = -1$ si ha la simmetria centrale di centro C.

Si dimostra che il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti F e F' è uguale al quadrato della costante di omotetia.

Definizione 2 - L'omotetia (1) si dice concorde se $k \in \mathbf{R}^+$
Essa trasforma un segmento PQ nel segmento P'Q' parallelo ed equiverso al primo.



Definizione 3 - L'omotetia (1) si dice discorde o inversa se $k \in \mathbf{R}^-$
Essa trasforma un segmento PQ nel segmento P'Q' parallelo e di verso opposto a PQ



Se il centro dell'omotetia è l'origine, la trasformazione ha equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2)$$

che trasformano un punto $P(x, y)$ nel punto $P'(kx, ky)$ e ai punti (1, 0) e (0, 1) corrispondono i punti (k , 0) e (0, k) per cui le (2) rappresentano un cambiamento di unità di misura per i segmenti del piano se k è positivo, ; se k è negativo rappresentano anche un cambiamento del senso positivo degli assi del sistema.