Quesito 1

Siano a e b due numeri reali positivi.

Essendo la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ e la media geometrica $\sqrt{ab}$ Se $a \neq b$ la media aritmetica è maggiore della media geometrica, infatti

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

elevando al quadrato otteniamo

$$\frac{(a+b)^2}{4} > ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab > 0$$

$$(a+b)^2 > 0$$

Se i numeri a e b sono uguali, la media aritmetica risulta uguale alla media geometrica

Dati n numeri positivi $a_1, a_2, ..., a_n$

La media aritmetica è data da

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La media geometrica è data da

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Quesito 2

Consideriamo l'evento E_1 che è quello di ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado e l'evento E_2 che è quello di ottenere un doppio 1 con 24 lanci di due dadi.

La probabilità di ottenere 1 è $\frac{1}{6}$, mentre la probabilità contraria è $\frac{5}{6}$.

Applicando il teorema della probabilità contraria otteniamo

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$$

La probabilità di non ottenere un doppio 1 lanciando 2 dadi è $\frac{35}{36}$

Avremo pertanto

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$$

Per cui

$$p_1 > p_2$$

Quesito 3

La probabilità di ottenere un risultato prescelto su tre possibilità $1, x, 2$ è $\frac{1}{3}$; la probabilità di non ottenerlo sarà $\frac{2}{3}$.

Poiché i risultati favorevoli per ottenere un pareggio devono essere 12, mentre la probabilità di ottenere un 1 o un 2 è $\frac{2}{3}$, si ha

$$p = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \frac{2}{3} 13 = 1{,}63 \cdot 10^{-5}$$

Quesito 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^n}{n!}$$

il termine generale della successione è

$$a_n = \frac{3^n}{n!}$$

applicando il criterio del rapporto avremo:

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

e quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{3n!}{n!(n+1)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Pertanto la successione $\{a_n\}$ risulta convergente ed ha per limite 0.

Quesito 5

Una funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$$

si dice periodica di periodo *T* se, ponendo $x+T$ al posto di *x* si ottiene ancora la stessa funzione, cioè:

$$\forall x \in A, \quad x+T \in A$$

$$f(x+T) = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Proprietà – *Se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo , anche ogni multiplo di T, cioè kT con $k \in \mathbf{Z}$, è periodo di $f(x)$, cioè*

$$f(x+kT) = f(x) \ \blacksquare$$

Infatti dalla definizione di funzione periodica si ha

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x)$$

$$f(x+3T) = f[(x+2T)+T] = f(x+2T) = f(x)$$

Si ha anche

$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x)$$

$$f(x-2T)=f[(x-2T)+T]=f(x-T)=f(x)$$

Pertanto possiamo dire che

$$f(x+kT)=f(x)$$

Generalmente si sceglie come periodo il più piccolo numero positivo per cui vale la (1) e si chiama **periodo principale o periodo minimo**. ■

Essendo

$$f(x)=-\sin\frac{\pi x}{3}$$

avremo

$$-\sin\frac{\pi x}{3}=-\sin\frac{\pi(x+T)}{3}$$ e quindi

$$\frac{\pi x}{3}+2k\pi=\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi T}{3}$$

$$\frac{\pi T}{3}=2k\pi$$

pertanto

$T=6k$ e per $k=1$ otteniamo

$T=6$

In modo analogo se $f(x)=\sin 2x$ avremo

$$\sin 2x=\sin 2(x+T)$$

$$2x+2T=2x+2k\pi$$

e quindi

$T=k\pi$ e e per $k=1$ otteniamo

$T=\pi$