Quesito 6

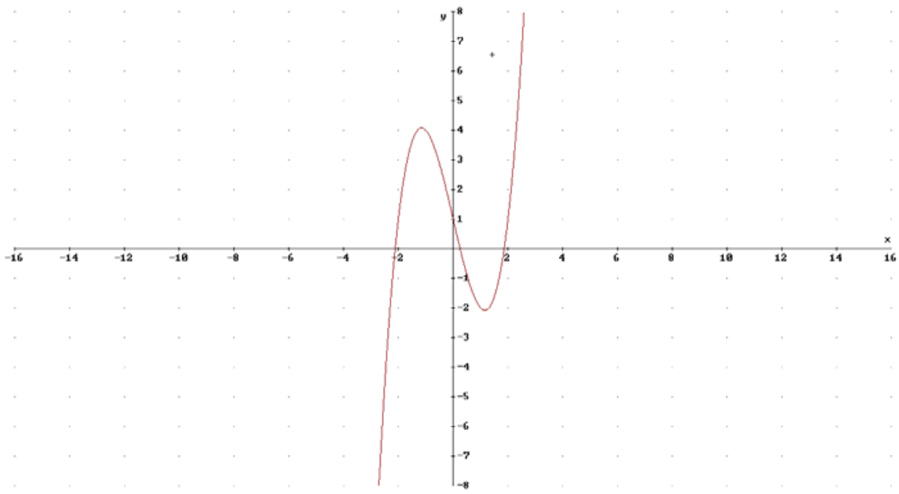
Sia $f(x) = x^n + px + q$ con $p, q \in \mathbb{R}$

La funzione risulta continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Si ha

$f'(x) = nx^{n-1} + p$

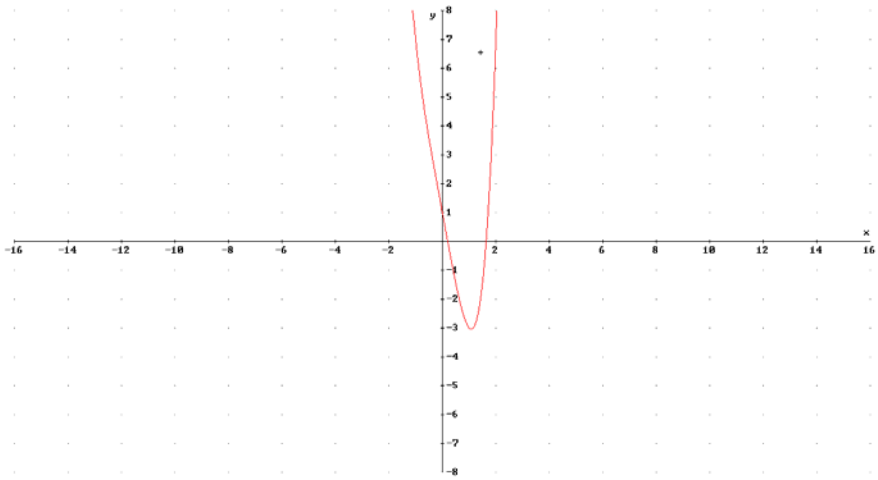
Se n è dispari allora $n-1$ sarà pari. Si hanno quindi al più due radici reali, vi sono quindi due punti a tangente orizzontale (massimo e minimo).

La funzione $f(x)$ avrà al massimo tre radici reali. Es.



Se n è pari allora $n-1$ sarà dispari, $f'(x)$ si annullerà al più in un punto $x = \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$ che sarà punto di massimo o di minimo.

Il polinomio avrà quindi al più due radici reali. Es.



Quesito 7

$f(x) = e^x - \sin x - 3x$

avremo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x - \sin x - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} - \sin(-x) + 3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sin x + 3x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sin x}{x} + 3\right) =$$

$$= +\infty(0+3) = +\infty$$

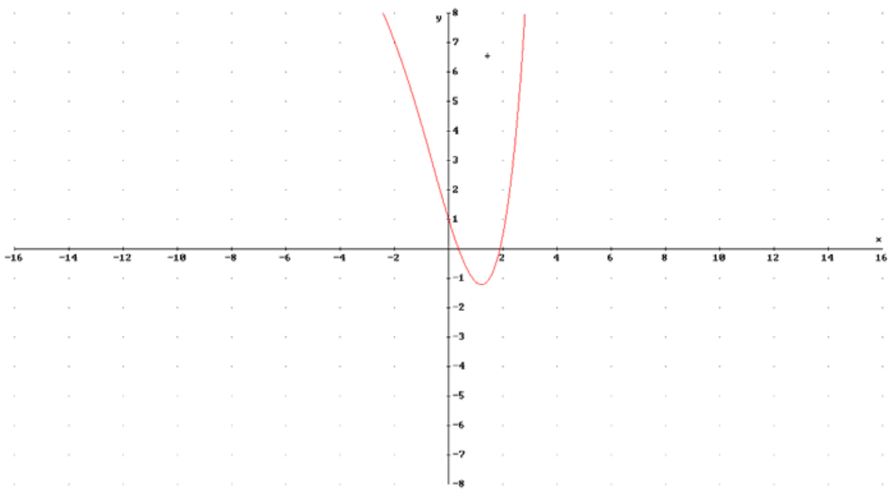
$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \sin x - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{-x} - \sin x - 3x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{\sin x}{x} - 3\right) = +\infty(+\infty - 0 - 3 = +\infty$$

Essendo la funzione continua in $[0;1]$ si ha

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = e - \sin 1 - 3$

Poiché agli estremi dell'intervallo la funzione assume valori di segno opposto, per il teorema degli zeri esisterà un numero reale $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla (vedi grafico della funzione)



Quesito 8

$f(x) = 3x + \ln x$

(dove si ritiene che dovrebbe essere $\ln x$ e non $\log x$ che è un modo improprio per indicare il logaritmo naturale)

Si ha:

$\mathrm{dom}\, f =]0;+\infty]$

la derivata prima sarà

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

essendo

$$3 + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}\, f$$

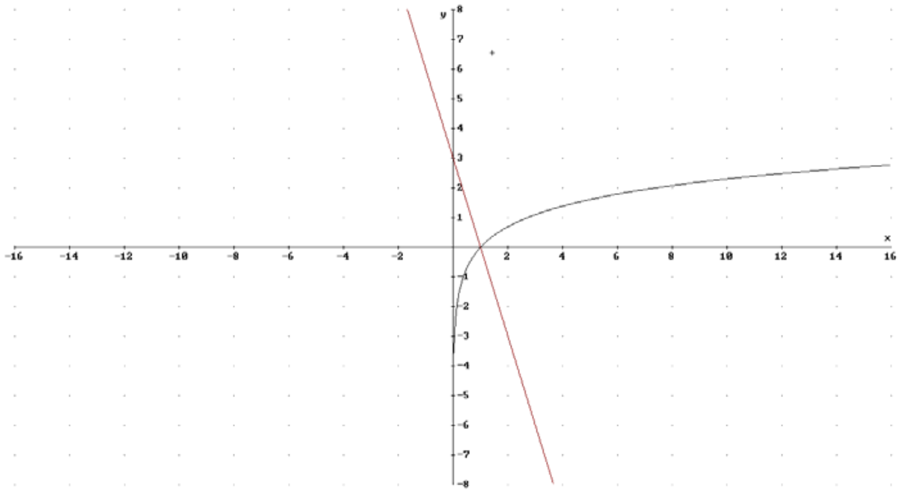
la funzione risulta strettamente crescente, pertanto è invertibile, e per la regola di derivazione della funzione inversa si ha:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

essendo $f(x) = 3$ avremo

$$3x + \ln x = 3$$
$$\ln x = 3 - 3x$$

Risolvendo l'equazione con il metodo grafico si ha



da cui si ottiene $x = 1$

Avremo quindi

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$