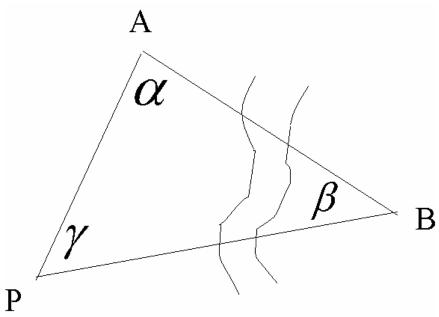
# Questionario

**Quesito 1**
Due rette si dicono sghembe quando non hanno nessun punto in comune ed appartengono a piani diversi.
La proprietà risulta falsa perché se x e t sono sghembe e lo sono anche y e z potrebbe verificarsi il caso che x e z siano complanari, risulta vera nel caso particolare in cui x,y,z appartengono a piani distinti e non paralleli

**Quesito 2**
Se il piano è parallelo alla base la sezione è un quadrato;
se il piano è parallelo ad uno degli spigoli di base la sezione è un trapezio isoscele;
se il piano è parallelo alla diagonale del quadrato di base la sezione è un deltoide, in lutti gli altri casi la sezione è un quadrilatero convesso.

**Quesito 3**




Misuriamo la distanza AP = l.
Ponendoci in A con uno strumento adatto a misurare gli angoli (tacheometro) misuriamo l'angolo $\alpha = B\widehat{A}P$ e successivamente, ponendoci in P misuriamo l'angolo $\gamma = A\widehat{P}B$; otteniamo $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$
Applicando il teorema dei seni avremo
$\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}$ da cui, essendo $\sin[\pi - (\alpha+\gamma)] = \sin(\alpha+\gamma)$,
otteniamo

$$AB = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

**Quesito 4**

$$y = \ln\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$$

il dominio della funzione è dato dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

otteniamo

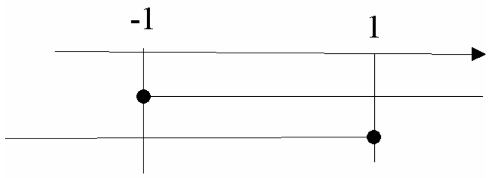
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} > x-1 \end{cases}$$

risolvendo la seconda avremo

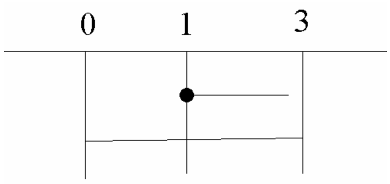
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$$

avremo

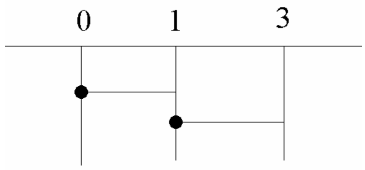



$-1 \leq x < 1$




$1 \leq x < 3$

l'unione dei sistemi fornisce il risultato



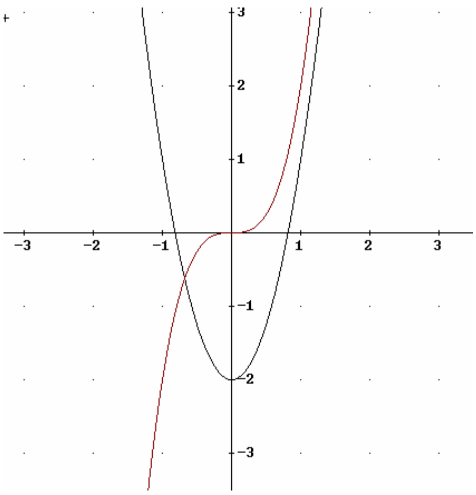

$-1 \leq x < 3$

che è anche la soluzione del sistema (1)
Pertanto la risposta esatta è la (B)

**Quesito 5**

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

risolvendo con il metodo grafico
(ponendo $y = 2x^3$ ed $y = 3x^2 - 2$) avremo




pertanto la funzione possiede solo uno zero negativo reale

**Quesito 6**

Si ha

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$$

posto $g(x) = x^2$ avremo

$$f\left[g(x)\right] = \int_0^{g(x)} e^{-t^2}\, dt \qquad \text{e quindi}$$

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) g'(x) \qquad \text{da cui}$$

$$D\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right] = 2xe^{-x^4}$$

Il teorema applicato è il seguente:

**Teorema** – Sia f è una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e $\varphi(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un intervallo I tale che $\varphi(I)$ e $g(I)$ siano $\subset[a,b]$

Sia inoltre $G(x)$ una funzione definita nell'intervallo I

$$G(x) = \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

allora, con le ipotesi fatte, la funzione G è derivabile nell'intervallo I e si ha

$$G'(x) = f\left[g(x)\right]g'(x) - f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)$$

Dim. Per la proprietà additiva degli integrali avremo

$$G(x) = \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)dt = \int_{\varphi(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{g(x)} f(t)dt = \int_{a}^{g(x)} f(t)dt - \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt =$$

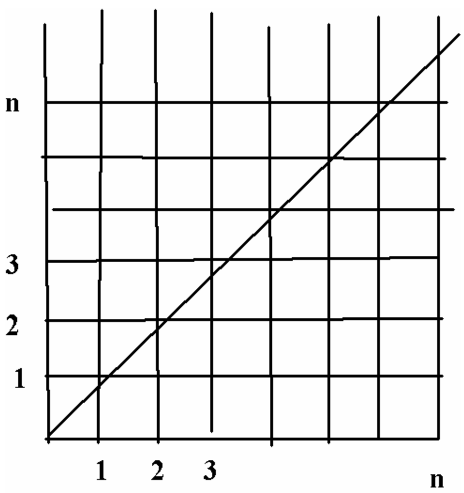
$$F\left[g(x)\right] - F\left[\varphi(x)\right]$$

La funzione F è derivabile nell'intervallo $[a,b]$ essendo continua

$\varphi(x)$ e $g(x)$ risultano derivabili in I $\subset[a,b]$, quindi $F\left[\varphi(x)\right]$ e $F\left[g(x)\right]$ risultano derivabili in I la funzione G risulta pertanto derivabile in I essendo differenza di funzioni derivabili.

$$G'(x) = f\left[g(x)\right]g'(x) - f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) \blacksquare$$

**Quesito 7**




Si tratta di sommare tutti i prodotti ottenuti dalle coppie $(i,k)$ con $i \le n$; $k \le n$ corrispondenti ai punti del reticolo indicato in figura (prodotto cartesiano $n \times n$)

La somma dei termini della prima riga è

$$S(1) = 1 + 2 + ...... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somma dei termini della seconda riga è

$$S(2) = 2\cdot1 + 2\cdot2 + ...... + 2\cdot n = 2\frac{n(n+1)}{2}$$

e così via

$$S(n) = n\cdot1 + n\cdot2 + ...... + n\cdot n = n\frac{n(n+1)}{2}$$

La somma totale sarà

$$S_{ik}=\sum_{k=1}^{n}S_k=\left[1\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2\frac{n(n+1)}{2}+3\frac{n(n+1)}{2}+....n\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\left(1+2+....n\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Se $i=k$ (termini della diagonale) avremo

$$S_{ii}=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad \text{infatti}$$

■ verifica per induzione

$$1^2+2^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

da $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ segue che la formula è vera per $n=1$

Supposto che sia vera per n, verifichiamo che è vera per $n+1$. Si ha

$$1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+1)\left[n(n+2)+6(n+1)\right]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)\left[2n(n+2)+3(n+2)\right]}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\quad ■$$

avremo quindi

$$S_{ik}-S_{ii}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

essendo $i\cdot k=k\cdot i$ dobbiamo non considerare i termini che stanno al di sopra o al di sotto della diagonale , per cui dobbiamo divider per 2. Avremo

$$\frac{S_{ik}-S_{ii}}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)}{12}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)\left[3n(n+1)-2(2n+1)\right]}{12}\right]=$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)=$$

$$=\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$$

La risposta esatta è pertanto la (D)

**Quesito 8**

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

essendo $x-y=2$ l'espressione è divisibile per 2

vediamo se è divisibile per 3

essendo $x=2+y$ avremo

$$x^2+xy+y^2=(2+y)^2+(2+y)y+y^2=4+y^2+4y+2y+y^2+y^2=$$

$$=3y^2+6y+4=3y(y+2)+4$$

quindi non è divisibile per 3

la risposta esatta è pertanto la (B)

**Quesito 9**

La combinazione di 3 oggetti tra gli 88 numeri dell'urna, perché 1 e 90 non si devono considerare, sarà

$$\binom{88}{3} = 109.736$$

**Quesito 10**

L'affermazione è vera, infatti effettuando il cambio di base si ha

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \log_2 2 = 1$$