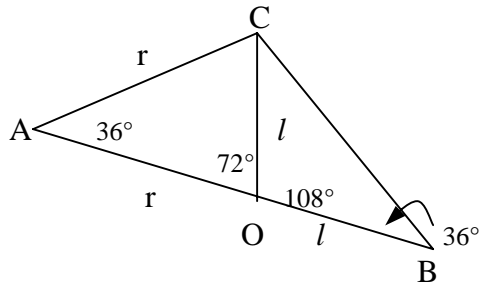


Soluzione dei quesiti

1)



Per la similitudine tra i triangoli ABC e BCD si ha: $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{OC}$ $\frac{l+r}{r} = \frac{r}{l}$

$$l^2 + lr - r^2 = 0 \quad \text{da cui:} \quad l = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{r(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

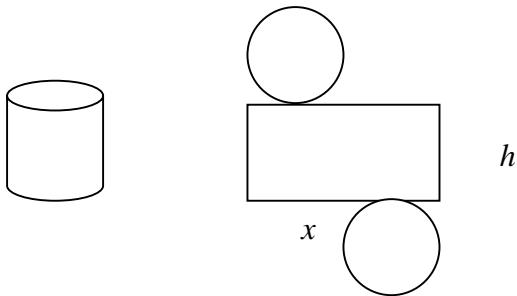
$$\frac{1}{2} \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \text{sen} 18^\circ$$

$$\cos 18^\circ = 1 - \text{sen}^2 18^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Applicando la formula di duplicazione si ha: $\text{sen} 36^\circ = \text{sen} 2 \cdot 18^\circ = 2 \text{sen} 18^\circ \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2)

$$V = 0,4l = 400 \text{cm}^3$$



$$V = \pi r^2 h \quad V = \pi x^2 h \rightarrow \pi x^2 h = 400 \quad h = \frac{400}{\pi x^2}$$

La superficie totale in funzione del raggio è: $S_t(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{400}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{800}{x}$

Calcoliamo la derivata prima $S_t'(x) = 4\pi x - \frac{800}{x^2}$ e, dallo studio del suo segno,

$$\text{ricaviamo: } 4\pi x^3 - 800 > 0; \quad x > \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$$

La superficie è minima quando $x = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3,993..$

3) $y = x \operatorname{sen} x$

- $\operatorname{sen} x = 1$ conduce a: $x = \frac{\pi}{2}$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

inoltre, essendo $y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$, si ha: $m = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$

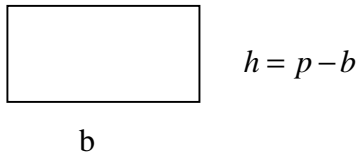
l'equazione della retta tangente sarà: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \rightarrow y = x$

- $\operatorname{sen} x = -1$ conduce a: $x = -\frac{\pi}{2}$ e $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

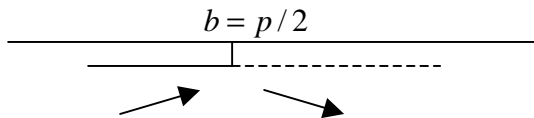
inoltre, essendo $m = y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

l'equazione della retta tangente sarà: $y + \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = -x$

4).



$$A(b) = b \cdot (p - b) = pb - b^2 \quad A'(b) = p - 2b \quad b < \frac{p}{2}$$



essendo $h = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ il rettangolo di area massima è un quadrato.

5). Il numero $e = 2,71828\dots$ è un numero trascendente ed è la base dei logaritmi naturali.

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Utilizzando la definizione di derivata si ha: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \ln e = e^x$.

6). Si definisce fattoriale di $n \in \mathbb{N}_0$ e si indica con $n!$ il prodotto di tutti i numeri naturali a partire da n , ossia $n! = n (n-1) (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n!$ indica le permutazioni di n elementi distinti, ovvero le disposizioni semplici di n elementi presi a "n" a "n". $P_n = D_{n,n} = n (n-1) (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Alla frazione $\frac{n!}{k! (n-k)!}$ si dà il nome di coefficiente binomiale. Essa viene indicata con il simbolo

$$\binom{n}{k} \text{ e si legge "n sopra k".}$$

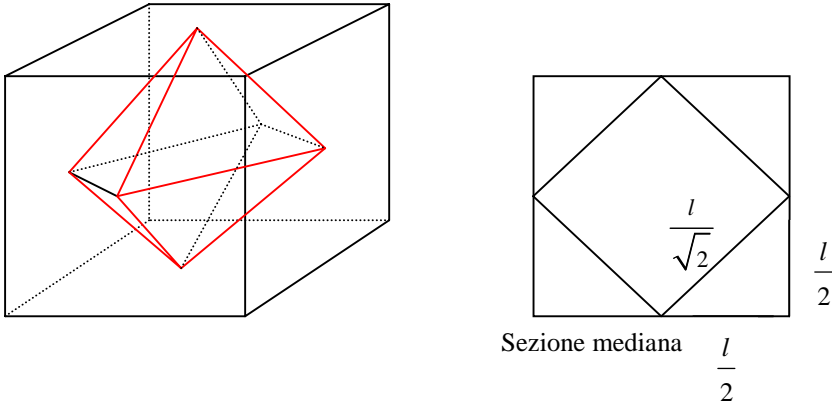
7). $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$

essendo $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4) + 3$ e $f(k) = 2$

si ha: $k^2(k-2)^2 + 1 = 0$ ovvero $[k(k-2)]^2 + 1 = 0$

essendo somma di due quadrati non sarà mai nulla. La funzione non possiede zeri.

8). L'ottaedro è regolare perché le due piramidi contrapposte che lo formano sono rette e a base quadrata.



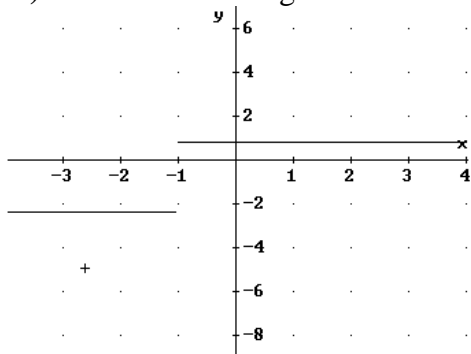
Essendo $V_p = \frac{1}{3} A_b h$ $V_{(ottaedro)} = \frac{2}{3} \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{l}{2} = \frac{l^3}{6}$ e $V_{(cubo)} = l^3$

Il rapporto richiesto è: $\frac{V_c}{V_o} = 6$.

9). Ricordando che $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ si ha:

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \sin^2(90^\circ - 35^\circ) = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1$$

10). La funzione assegnata è costante a tratti.



infatti,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow f(x) = \text{cost} \quad \forall x \neq -1$$