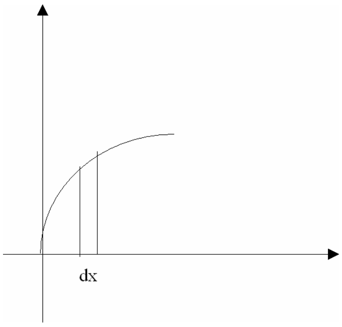
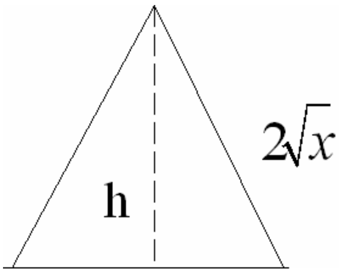
QUESITI

Quesito 1



Il volume di una striscia di larghezza dx è

$dV = A \cdot dx$ dove A è l'area del triangolo equilatero di lato $2\sqrt{x}$



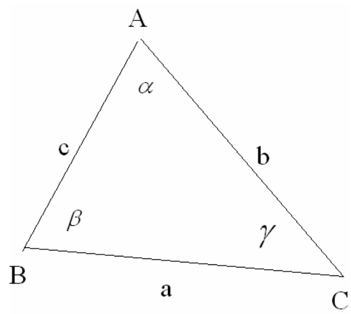
Essendo $h = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \sqrt{x}\sqrt{3} = \sqrt{3x}$ avremo

$A(x) = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{3x}}{2} = x\sqrt{3}$ quindi

$dV = x\sqrt{3}\ dx$

$$V = \int_0^1 dV = \int_0^1 x\sqrt{3}dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quesito 2



Indicando i lati del triangolo $a = 80$ $b = 60$ $c = 40$ ed applicando il teorema del coseno abbiamo

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ quindi

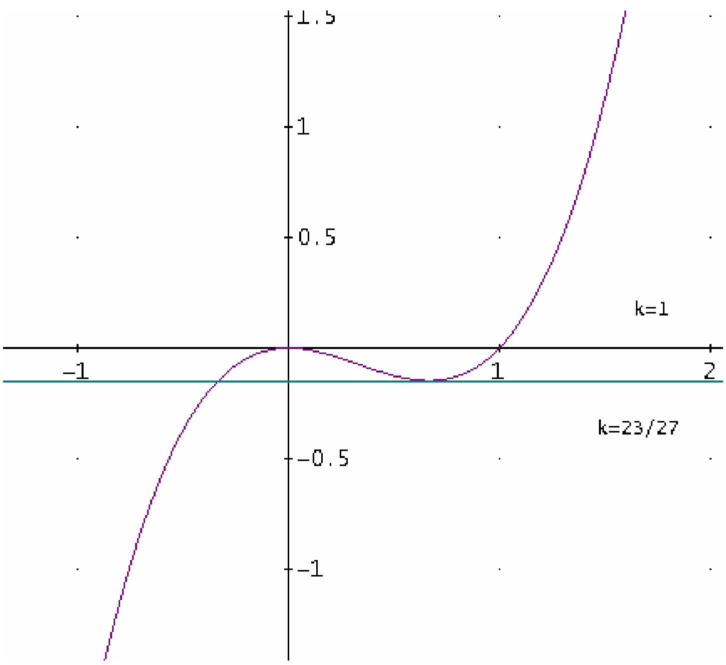
$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{6400+3600-1600}{9600} = \frac{8400}{9600} = 0,875 \quad \text{quindi}$$
$$\gamma \cong 28^\circ 57' 18''$$

Inoltre

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{6400+1600-3600}{6400} = \frac{4400}{6400} = 0,6875 \quad \text{quindi}$$
$$\beta \cong 46^\circ 34' 3'' \quad \text{e} \quad \alpha \cong 104^\circ 28' 39''$$

Quesito 3

L'equazione $x^3 - x^2 - k + 1$
Si può scrivere
$$x^3 - x^2 = k - 1$$
Ponendo $y = k - 1$ e $y = x^3 - x^2$
Per trovare le soluzioni dell'equazione basta risolvere il sistema
$$\begin{cases} y = k-1 \\ y = x^3 - x^2 \end{cases}$$
La prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x , la seconda rappresenta una cubica passante per l'origine, incontra l'asse x in $x = 0$ e $x = 1$; ha un massimo e un minimo
$$y' = 3x^2 - 2x$$
Per $x = 0$ si ha un massimo, per $x = \frac{2}{3}$
Il grafico è



La retta passa per il massimo $x = 0$ $y = 0$ si ha
$$k - 1 = 0 \quad \text{e quindi} \quad k = 1$$
La retta passa per il minimo $x = \frac{2}{3}$ $y = -\frac{4}{27}$ si ha

$-\frac{4}{27}=k-1$ e quindi

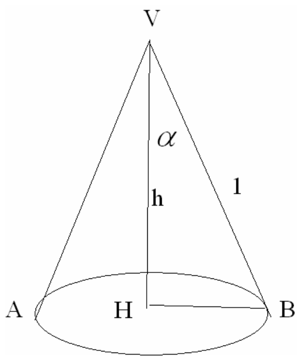
$k=\frac{23}{27}$

Per $k<\frac{23}{27}$ avremo una soluzione reale

Per $\frac{23}{27}\leq k\leq 1$ tre soluzioni reali

Per $k>1$ una soluzione reale

Quesito 4



Indicando con α l'angolo HVB avremo

$h=\cos\alpha$

Il raggio sarà $r=HB=\sin\alpha$

Il volume del cono sarà $V=\frac{1}{3}A_{base}h$ e quindi

$$V=\frac{1}{3}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$$

Determiniamo il volume massimo

$$V'=\frac{1}{3}\pi(2\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha)=\frac{1}{3}\pi\sin\alpha(2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$V'=\frac{1}{3}\pi\sin\alpha(2-3\sin^2\alpha)\geq 0$$

avremo

$\sin\alpha\geq 0$

$2-3\sin^2\alpha\geq 0$ con $\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Il volume massimo si ha per $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Quindi

$$V_{\max}=\frac{1}{3}\pi\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

Supponendo che un litro di olio equivale ad un dm^3 avremo

$$V_{\max}=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi\cdot 10^3=402,06l$$

Quesito 5

La funzione $y = x^3 + 8$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è continua e derivabile essendo comunque continua in $\mathbb{R}$, pertanto sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi esisterà almeno un punto x_0 in $]-2, 2[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si ha:

$$f(b) = f(2) = 16$$

$$f(a) = f(-2) = 0$$ avremo quindi

$$f'(x_0) = \frac{16}{4} = 4$$

Essendo inoltre

$$f'(x_0) = 3x^2$$ otteniamo

$$3x^2 = 4$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Quindi

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Che verificano il teorema di Lagrange in quanto interni all'intervallo $]-2, 2[$

In questi punti la tangente al grafico di $f(x)$ risulta parallela alla corda congiungente i punti $A(-2, 0)$ e $B(2, 16)$

Quesito 6

Usando prima la maggiorazione avremo

$$p_1 = p + \frac{6}{100} p = \frac{106}{100} p$$

$$p_2 = p_1 + \frac{6}{100} p_1 = \frac{94}{100} p_1 = \frac{94}{100} \frac{106}{100} p$$

Usando prima la diminuzione avremo

$$p_1 = p - \frac{6}{100} p = \frac{94}{100} p$$

$$p_2 = p_1 + \frac{6}{100} p_1 = \frac{106}{100} \frac{94}{100} p =$$

Essendo

$$\frac{106}{100} \frac{94}{100} < 1$$ il prezzo finale è minore del prezzo iniziale

Quesito 7

L'integrale di una funzione reale dispari esteso all'intervallo $[-2, 2]$ simmetrico rispetto all'origine è ovviamente nullo

Si ha

$$\int_{-2}^{2}[3+f(x)]dx=\int_{-2}^{2}3dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx$$

Essendo

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$ avremo

$$\int_{-2}^{2}[3+f(x)]dx=[3x]_{-2}^{2}=12$$

Quesito 8

Si ha

$4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$ e quindi

$$\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=\frac{15(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)=15(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$(n-2)(n-3)[n(n-1)-15(n-4)]=0$$

I valori $n=2$ ed $n=3$ non sono accettabili perché minori di 4

Avremo

$$n^2-n-15n+60=0$$

$$n^2-16n+60=0$$

Quindi $n=6$ $n=10$

Quesito 9

Risolvendo per parti l'integrale

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx$$

Poniamo $\sqrt{1-x^2}$ come fattore finito e dx come fattore differenziale

Avremo

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\left[\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]=$$

$$x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\arcsin x$$

Passando al primo membro $\int\sqrt{1-x^2}dx$

Avremo

$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ quindi

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1=\frac{1}{2}\arcsin 1=\frac{\pi}{4}$$

Che è l'area di un quarto di circonferenza avente centro nell0rigine e raggio 1

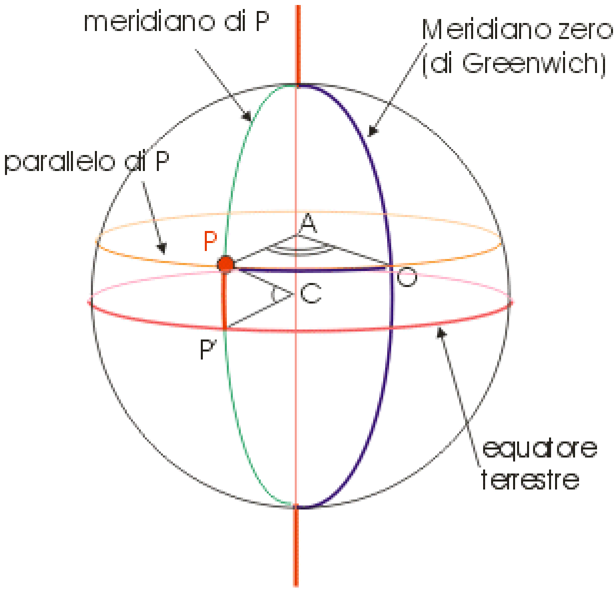
Quesito 10

Articolo copiato dal sito http://www.vialattea.net/eratostene/gloss/coordinategeografiche.html

Coordinate geografiche, latitudine e longitudine geografiche

Nel sistema di coordinate terrestri si seglie come *piano fondamentale* quello dell'equatore mentre la *direzione fondamentale* è l'asse di rotazione della Terra. Si suppone che la superficie terrestre sia, in prima approssimazione, di forma sferica.

Un qualunque piano che contenga l'asse terrestre (*piano meridiano*), determina sulla superficie terrestre un cerchio massimo passante per i poli detto circolo meridiano. Per meridiano geografico si intende una semicirconferenza compresa tra i due poli ed ogni meridiano ha un suo antimeridiano che completa il *circolo meridiano*, dalla parte opposta. I meridiani sono tutti uguali fra loro.



I paralleli invece sono i circoli formati dall'intersezione tra qualunque piano parallelo all'equatore con la superficie terrestre. I paralleli sono tanto più piccoli quanto maggiore è la loro distanza dall'equatore.

***Paralleli* e *meridiani* formano una rete sulla superficie (reticolato geografico), che ci permette di identificare la posizione assoluta di un punto. Per far questo basta indicare il *parallelo* e il *meridiano* che passano per tale punto (*parallelo del luogo* e *meridiano del luogo*). Allo scopo di indicare un preciso *parallelo* o *meridiano*, si definiscono le coordinate geografiche.**

Viene fissato convenzionalmente un meridiano fondamentale, passante per l'Osservatorio astronomico di Greenwich, nei pressi di Londra. Tale meridiano è chiamato anche meridiano zero, meridiano origine, primo meridiano, meridiano iniziale, o meridiano di Greenwich. e rappresenta il riferimento per la suddivisione convenzionale in fusi orari e per il tempo universale.

La longitudine geografica (λ) è la distanza angolare di un punto dal *meridiano fondamentale*, misurata sull'arco di *parallelo* che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra il piano del *meridiano del punto* e il piano del *meridiano fondamentale*. Nel disegno qui a fianco, si tratta dell'angolo PAO dove A è un punto sull'asse terrestre appartenente al piano

del parallelo di P. La *longitudine* può essere EST o OVEST a seconda che il punto si trovi a oriente o a occidente del *meridiano fondamentale*. Essa varia numericamente da 0° (per i punti che si trovano lungo il meridiano fondamentale) a 180°, in senso positivo verso OVEST e negativo verso EST.

La latitudine geografica (ϕ) è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra la verticale del luogo e il piano dell'*equatore*. Nel disegno si tratta dell'angolo PCP' dove C è il centro della Terra. Essa varia da +90° (polo nord) a -90° (polo sud). I punti lungo l'equatore hanno *latitudine* 0°. Vedi anche latitudine astronomica.

Sia la *longitudine* che la *latitudine geografiche* vengono espresse in gradi e frazioni di grado.

I *paralleli* si possono considerare insiemi di punti sulla superficie terrestre che hanno uguale *latitudine* e i *meridiani* insiemi di punti con uguale *longitudine*. *Meridiani* e *paralleli* sono infiniti, ma spesso si usa prendere in considerazioni quelli che distano di un grado l'uno dall'altro. Essi sono detti *meridiani di grado* e *paralleli di grado*. Esistono 360 *meridiani di grado* e 178 *paralleli di grado* (escludendo i due paralleli ai poli, che sono ridotti ad un punto).

La parola *meridiano* deriva dal latino *meridies*, perché un meridiano unisce tutti i punti che hanno il mezzogiorno nello stesso momento.