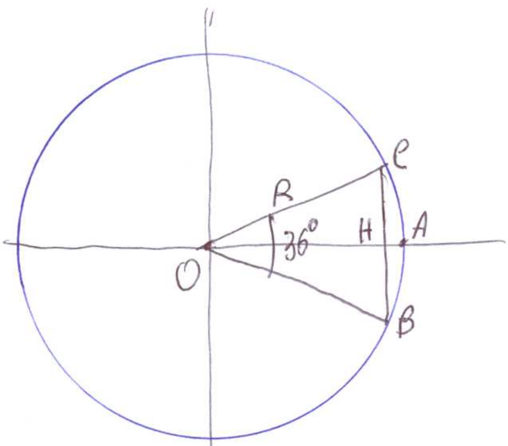
Quesiti

Quesito 1

L'affermazione risulta vera se i due solidi hanno anche la stessa altezza

presumendo che le altezze siano diverse in quanto non precisato dal quesito, i due solidi, pur avendo lo stesso volume non hanno in generale sezioni di uguale area. pertanto la proposizione è falsa

Quesito 2



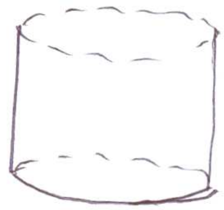
Dalla geometria sappiamo che il lato di un decagono regolare inscritto in un cerchio è $l = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

nel nostro caso $OC = R$, ma

$CH = \frac{1}{2} CB$ per cui essendo $CB = l$. avremo

$$\frac{CH}{R} = \sin 18^\circ = \frac{1}{2}\,\frac{CB}{R} = \frac{1}{2R}\,R\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

quesito 3



essendo $S = \pi r^2 + 2\pi r h$, indicando $r = x$

avremo $h = \dfrac{S - \pi r^2}{2\pi x}$ con $S - \pi x^2 \geq 0$

Il volume sarà

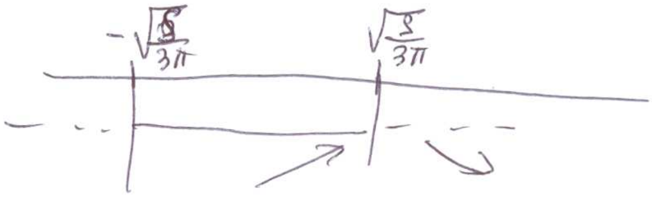
$$V = \pi x^2 \left(\frac{S - \pi x^2}{2\pi x} \right) = x \left(\frac{S - \pi x^2}{2} \right)$$

$$V = \frac{1}{2} \left(S x - \pi x^3 \right)$$ e quindi

$$V' = \frac{1}{2} \left(S - 3\pi x^2 \right) \geq 0$$

$$3\pi x^2 - S \leq 0$$ da cui, essendo

$$x = \pm \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$ avremo



e quindi

il volume massimo si ha per

$$x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

quesito n.

La regola di de l'Hopital è esposta su un qualunque testo di analisi ③

Calcoliamo il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$$

Applicando ripetutamente la regola di de l'Hopital avremo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2008\, x^{2007}}{2^x \ln 2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2008\cdot 2007\, x^{2006}}{2^x \cdot 2 \ln 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2008\cdot 2007\cdot 2006\, x^{2005}}{2^x \cdot 3 \ln 2}$$

e così via. avremo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2008}\cdot 2007!}{2^x\, \cancel{2008} \ln 2} = 0$$

Quesito ~~5~~.

Essendo

$$P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

dalla condizione

$$P(0)=0 \text{ avremo}$$

$$d=0$$

$$P'(x) = 3a x^2 + 2bx + c$$

dalla condizione $P'(0)=0$ avremo

$$c=0$$

dalle condizioni $P(1) = 0$ ovvero, essendo

$$e = 0 \; ; \; d = 0$$

$$a + b = 0$$

Consideriamo

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2)\,dx = \frac{1}{12}$$ ovvero

$$\left[\frac{a x^4}{4} + \frac{b x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} = \frac{1}{12}$$

si ha il sistema

$$\begin{cases} a = -b \\ 3a + 4b = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a = -b \\ -3b + 4b = 1 \end{cases}$$ da cui

$$a = -1 \; ; \; b = 1$$

Il polinomio $P(x)$ sarà

$$P(x) = -x^3 + x^2$$

Quesito 6 Essendo per $n > 3$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

per definizione di progressione aritmetica ⑤
avremo che il secondo termine sarà uguale al primo più la ragione; avremo

$$\frac{n(n-1)}{2} = n + d$$

e analogamente per il terzo termine.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{2} + d$$

risolvendo il sistema otteniamo n.

Poiché $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$

$$d = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

sostituendo nella seconda relazione otteniamo

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1) + n(n-3)}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} = n(2n-4)$$

dividendo per n (essendo $\neq 0$) avremo

$$(n-1)(n-2) - 6n + 12 = 0$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0$$

$$\Delta = 81 - 56 = 25 \quad \text{per cui}$$

$$x = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$$ 6

Il valore 2 si scarta perché $x > 3$ quindi avremo

$$x = 7$$

quesito 4

L'equazione

$$x^3 - 3x^2 + k = 0$$

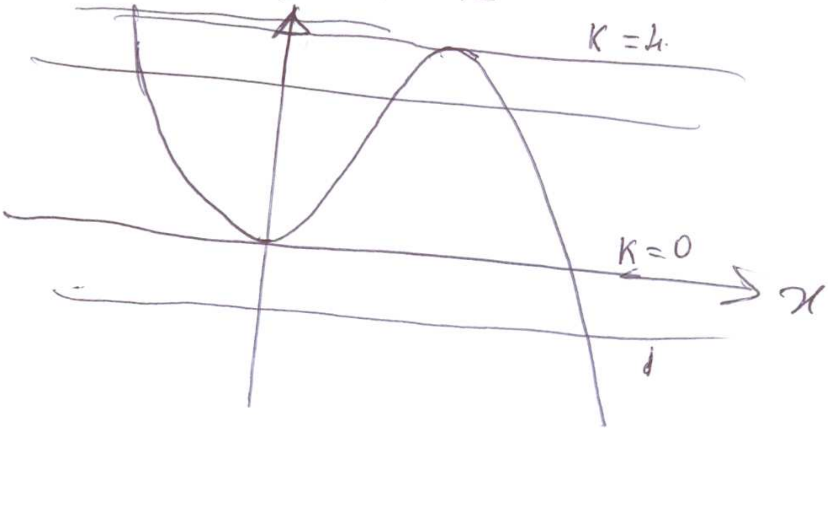
è equivalente a

$$k = 3x^2 - x^3$$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y = k \\ y = 3x^2 - x^3 \end{cases}$$

che rappresenta l'intersezione di una cubica con un fascio di rette parallele all'asse x.

Il grafico della cubica è ~~facilmente~~ un grafico elementare, si ha



Si ha (4)

$y' = 6x - 3x^2$

$y' = 0$ per $x = 0$; $x = 2$

$x = 0$ minimo

$x = 2$ massimo

$y(0) = 0$

$y(2) = 4.$

avremo

per $K < 0$ 1 soluzione

per $K = 0$ due soluzione di cui una doppia

per $0 < K < 4$ tre soluzioni

per $K = 4$ due soluzioni di cui una doppia

per $K > 4$ una soluzione.

Quanto f

$f(x) = \pi^x - x^\pi$

perchè la base deve essere positiva avremo

$\text{dom} f =]0; +\infty[$

la derivata prima sarà

$f'(x) = \pi^x \ln\pi - \pi x^{\pi-1}$

per $x = \pi$ avremo

$f'(\pi) = \pi^\pi \ln\pi - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi \ln\pi - \pi^\pi = \pi^\pi(\ln\pi - 1)$

per cui $f'(x)$ per $x = \pi$ sarà positiva

$f''(x) = \pi^x \ln^2\pi - \pi(\pi-1)\, x^{\pi-2}$

per $x=\pi$ avremo

$\pi^\pi \ln^2\pi - (\pi^2-\pi)\, \pi^{\pi-2} =$

$\pi^\pi \ln^2\pi - \pi \cdot \pi^{\pi-2} + \pi \cdot \pi^{\pi-2} =$

$= \pi^{\pi-1}(\pi \ln^2 x - \pi + 1)$

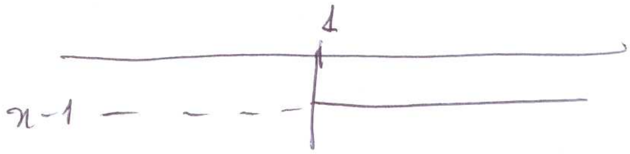
essendo $\ln\pi > 1$ avremo che la derivata seconda risulterà positiva per $x=\pi$

Quesito 9

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

Il dominio è dato da tutti i numeri reali escluso 1

ovvero



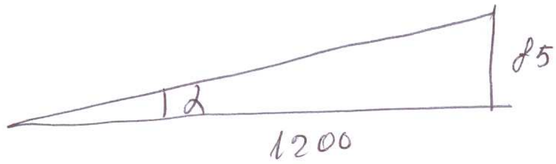
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{per } x>1 \\ \dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{per } x<1 \end{cases}$$ cioè

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{per } x<1 \\ x+1 & \text{per } x>1 \end{cases}$$ si ha

$\lim_{x\to1^-}(-x-1) = -2$; $\lim_{x\to1^+}(x+1) = 2$

pertanto il limite per $x \to 1$ non esiste ed il punto 1 è un punto di discontinuità di prima specie (avente salto uguale a 4.

quesito 10



essendo $tg\,\alpha = \frac{85}{1200} = 0{,}07$

la pendenza sarà del 7%

Inoltre avremo

$sen\,\alpha = \frac{85}{1200} = 0{,}0708$

per cui $\alpha = 4^\circ\, 3'\, 36''$