Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove il coefficiente a_n è il coefficiente di x^n

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$

Applicando la regola di derivazione delle f:unzioni polinomiali avremo

$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$

Ripetendo la procedura n volte avremo

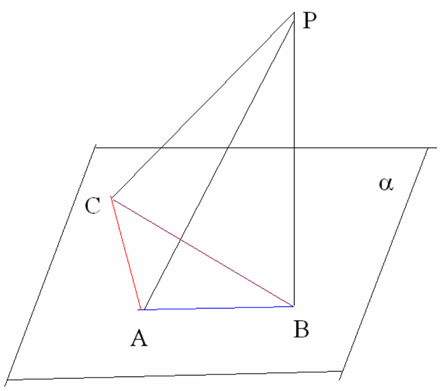
$p^{(n)}(x) = (n(n-1)(n-2)...........1)a_n$

Cioè

$p^{(n)}(x) = n!a_n$

Quesito 2

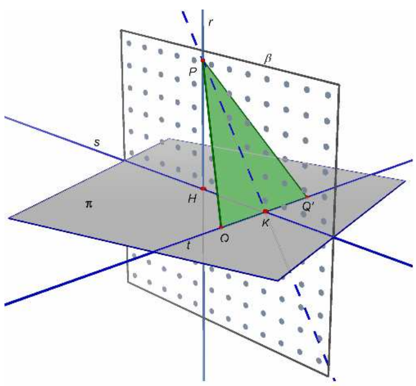
***Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB,PBC,PCA sono triangoli rettan*goli**



I triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B perché la retta r è perpendicolare al piano

Il triangolo PAC è rettangolo per il teorema delle tre perpendicolari:

Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una retta del piano, la congiungente il piede di questa seconda perpendicolare con un qualunque punto della prima, è perpendicolare alla retta giacente sul piano



Quesito 3

Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2

$$f(x) = e^{3x} + 1$$

Sia

Il coefficiente angolare della retta tangente nel generico punto x sarà dato da

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

Si ha quindi

$$3e^{3x} = 2$$

$$e^{3x} = \frac{2}{3} \qquad x = \frac{\ln\frac{2}{3}}{3}$$

Quesito 4

Si calcoli $\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x}$

Ponendo $\frac{1}{x} = t$ avremo $x = \frac{1}{t}$

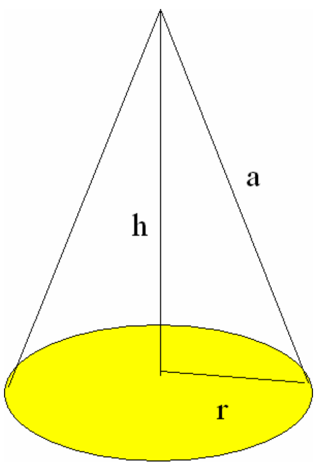
Per $x \to \infty$ $t \to 0$

Per cui o otteniamo

$$\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} 4x\frac{\sin t}{t} = 4$$

Quesito 5

Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità



Indichiamo con a l'apotema del cono, r il raggio di base e h l'altezza. Il volume del cono sarà

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{essendo} \qquad r^2 + h^2 = a^2 \qquad \text{avremo}$$

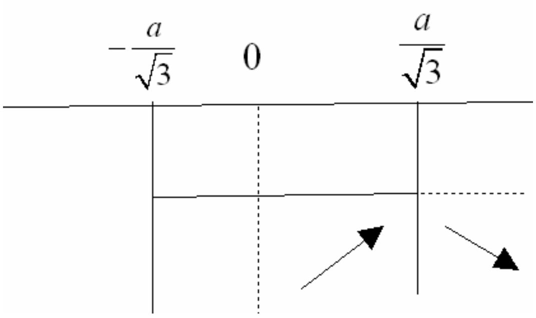
$$V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 - h^2) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

Per trovare il massimo, calcoliamo la derivata

$V' = \pi\left(-h^2 + \frac{1}{3}a^2\right) \geq 0$ si ha

$a^2 - 3h^2 \leq 0$

Essendo $h = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ otteniamo



Si ha un massimo per $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Sostituendo avremo, essendo 80 cm = 8 dm

$V = \frac{1}{3}\pi\frac{a}{\sqrt{3}}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{2}{3}a^2 = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$ essendo a = 8 dm otteniamo

$V = \frac{2 \bullet \pi \bullet 512}{9\sqrt{3}} \simeq 206$ litri

Quesito 6

Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$

Il dominio sarà dato da

$\cos x \geq 0$ e quindi

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Quesito 7

Per quali valori di k la funzione $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 1 & per \quad x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & per \rightarrow \quad x > 4 \end{cases}$ è continua in $x = 4$

Dovrà aversi

$h(4) = \lim_{x\to 4^-}(3x^2 - 11x - 1) = \lim_{x\to 4^+}(kx^2 - 2x - 1)$ ovvero

$16k - 9 = 0$ per cui $k = \frac{9}{16}$

Quesito 8

Se $n>3$ ***e*** $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ ***sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n***

Essendo i termini in progressione aritmetica sarà costante la differenza tra due coppie di termini successivi. Avremo

$a_2-a_1=a_3-a_2$ quindi essendo $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ otteniamo

$$\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}=\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{n-3}=2\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}$$ e quindi

$$\frac{n!}{(n-3)!(n-(n-3))!}=2\frac{n!}{(n-2)!2!}=\frac{n!}{(n-1)!1!}$$ dividendo per n! avremo

$$\frac{1}{6(n-3)!}=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}$$ cioè $$\frac{1}{6(n-3)!}=\frac{1}{(n-2)(n-3)!}-\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!}$$ e quindi

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{(n-2)}-\frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

$$(n-1)(n-2)=6(n-1)-6$$

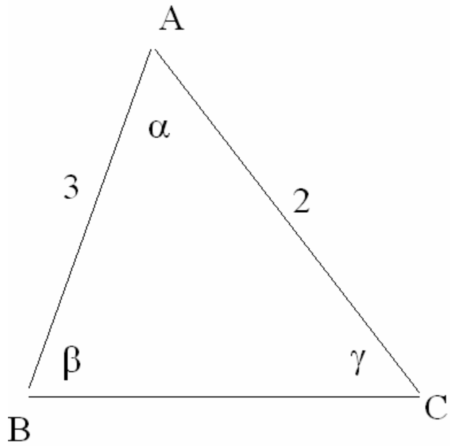
$$(n-1)(n-2)=6(n-2)$$

$(n-2)\left(n-1-6\right)=0$ essendo $n>3$ otteniamo

$$n=7$$

Quesito 9

Si provi che non esiste il triangolo ABC con AB = 3, AC = 2 e $A\hat{B}C$ = 45°. Si provi altresì che se AB =3, AC = 2 e $A\hat{B}C$ =30°, allora esitono due triangoli che soddisfano queste condizioni



Sia AB = 3 AC = 2 $\beta=45°$

Applicando il teorema dei seni avremo

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\gamma}$$ cioè

$$\sin\gamma = \frac{3}{2}\sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1 \quad \text{quindi non esiste il triangolo ABC}$$

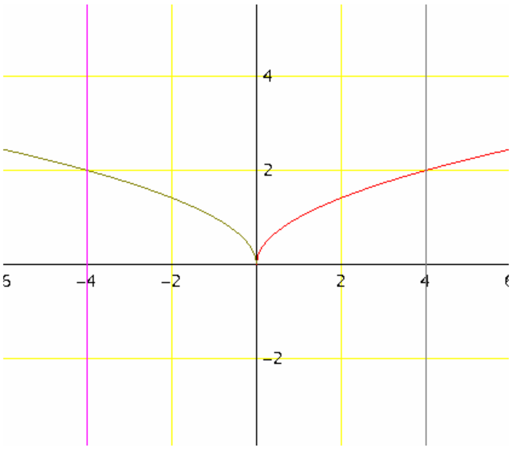
Se $\beta = 30°$ avremo

$$\sin\gamma = \frac{3}{2}\sin 30° = \frac{3}{4}$$

L'angolo γ avrà due soluzioni e si avranno due triangoli uno acutangolo e l'altro ottusangolo

Quesito 10

Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 4 e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y



Essendo $x \geq 0$ sarà $y \geq 0$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{avremo} \quad y = \pm 2$$

Il volume del solido si ottiene sottraendo al volume del cilindro avente raggio 4 e altezza 2, il volume generato facendo ruotare la curva attorno all'asse y

Si ha

$$V_{ol\ cilindro} = \pi r^2 h = 32\pi$$

$$V_{ol\ solido} = \pi\int_0^2 [[f(y)]]^2 dy = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

Il volume richiesto sarà

$$V = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi$$