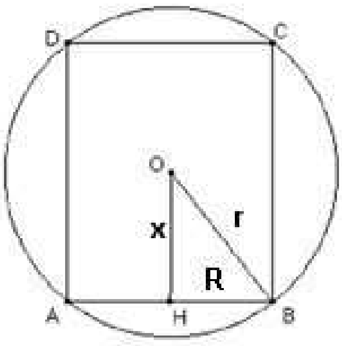
Quesito 1

Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?



sia r il raggio della sfera, indichiamo con 2x l'altezza del cilindro e con R il raggio della base del cilindro. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OBH avremo

$$R=\sqrt{r^2-x^2}$$

Il volume del cilindro sarà

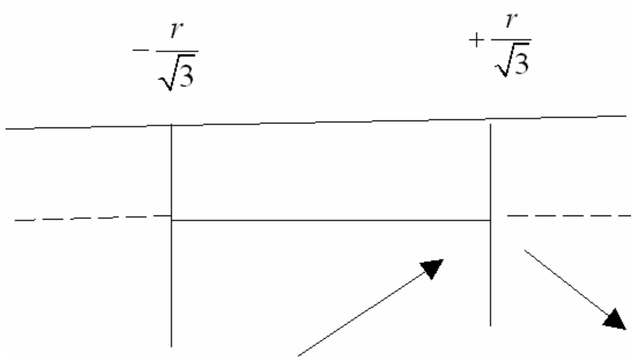
$$V=\pi(r^2-x^2)2x$$

Calcoliamo il volume massimo usando la derivata prima

$$V'=\pi\left[-4x^2+2(r^2-x^2)\right]=-2\pi(r^2-3x^2)$$ si ha

$$3x^2-r^2\leq 0 \qquad x=\pm\frac{r}{\sqrt{3}}$$

Avremo



Il volume massimo si ha per $x=\frac{r}{\sqrt{3}}$

Avremo quindi

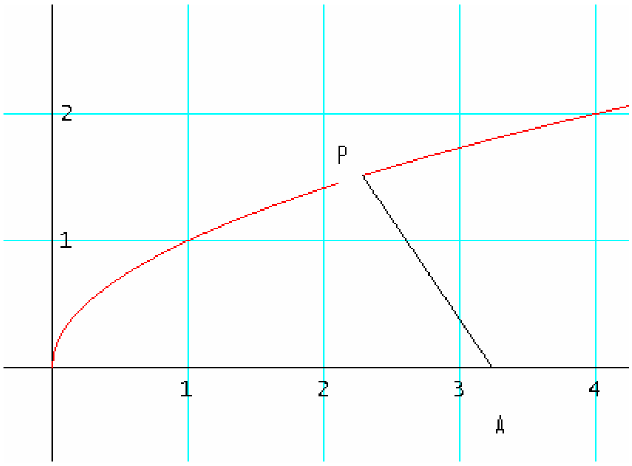
$$R=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{3}}=r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

La capacità sarà

$$V=\pi R^2 h=\frac{288\pi}{\sqrt{3}}\simeq 522{,}7 \text{ litri}$$

Quesito 2

Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4;0)$



Sia $P(t;\sqrt{t})$ un punto della curva, la distanza AP sarà

$$d(AP)=\sqrt{(t-4)^2+t}=\sqrt{t^2-7t+16}$$

La derivata prima sarà

$$d'=\frac{2t-7}{\sqrt{t^2-7t+16}}\geq 0 \qquad t\geq\frac{7}{2}$$

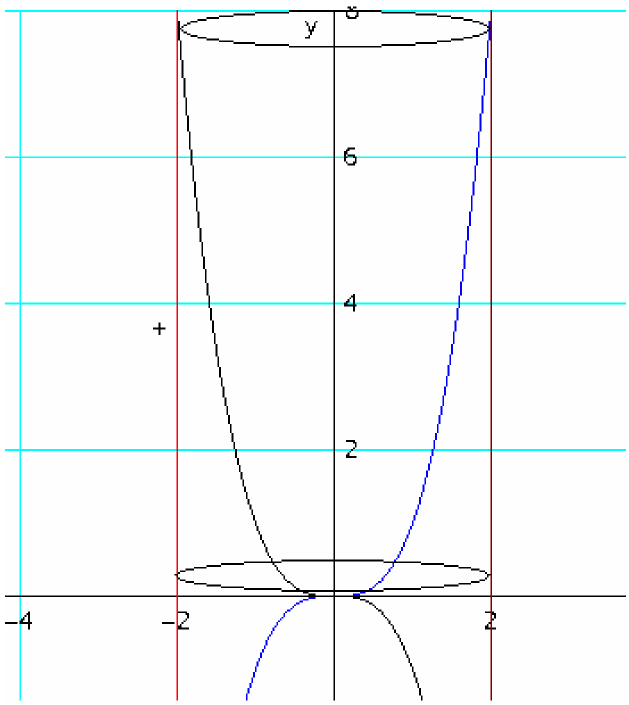
La distanza è minima per $t=\frac{7}{2}$

Le coordinate di P sono $P\left(\frac{7}{2};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

Quesito 3

Sia R la regione delimitata dalla curva $y=x^3$, dall'asse x e dalla retta $x=2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W .

Si ha x = 2 y = 8



Il volume richiesto si ottiene dalla differenza fra il volume del cilindro avente raggio di base 2 e altezza 8 e il volume del solido che si ottiene dalla rotazione attorno all'asse y della curva $x = \sqrt[3]{y}$

Avremo

$$V = V_{cil} - \pi \int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\, dy = 32\pi - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = 32\pi - \frac{3}{5} 32\pi = \frac{64}{5}\pi$$

Quesito 4

Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. si trovi n.

Risolviamo l'equazione

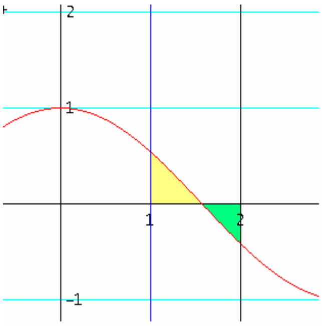
$\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$ con $n \geq 4$ avremo

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$\frac{n-3}{4} = 1$ e quindi $n = 7$

Quesito 5

Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da x = 1 a x = 2 radianti.



L'area sarà

$$S = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x dx = [\sin x]_1^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = 2 - \sin 1 - \sin 2$$

Quesito 6

Si calcoli $\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$

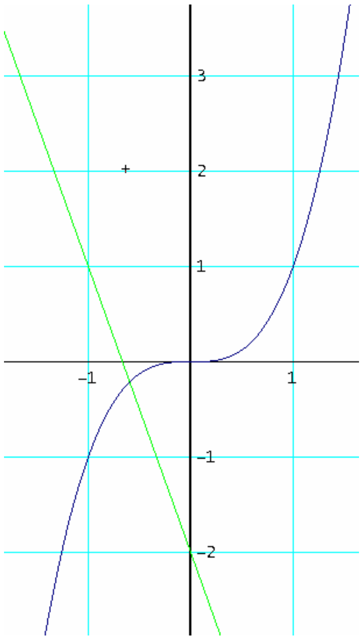
Avremo

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \left(\frac{0}{0}\right)^{H} = \lim_{x \to a} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 a$$

Quesito 7

Si provi che l'equazione $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0

Usando il metodo grafico avremo



$y = x^{2011}$ e $y = -2011 - 12$

Applicando il teorema degli zeri avremo
$f(-1) = -2000 < 0$ $f(0) = 12 > 0$

Per cui si ha una sola radice compresa tra -1 e 0

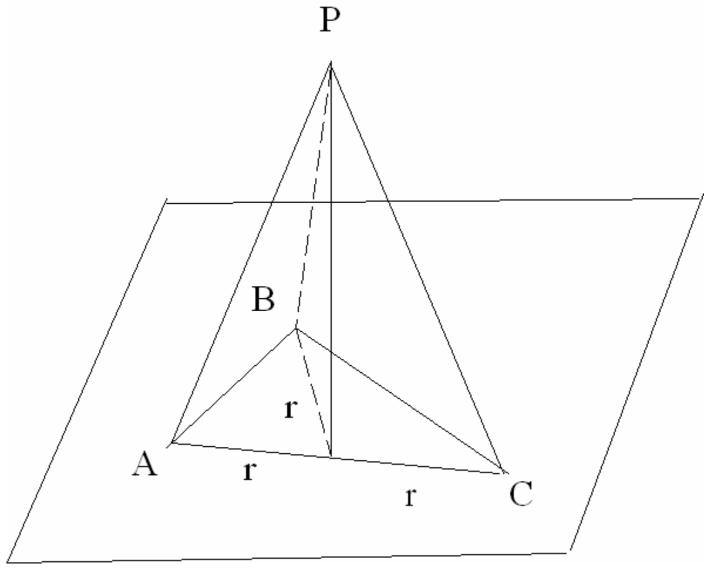
Quesito 8

In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è così spesso citato?

Il problema della quadratura del cerchio è uno dei problemi classici dell'antichità assieme alla duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo
Nessuno di questi è risolubile con le tecniche della geometria (utilizzando costruzioni che richiedono soltanto la riga e il compasso).
La soluzione di questo problema è stata affrontata da Archimede con il metodo di esaustione che consiste nel confrontare l'area del poligono circoscritto di n lati e quella del poligono inscritto e stabilire che tendono allo stesso valore. Archimede però non fu in grado di generalizzare questo risultato, anzi fu costretto a calcolarlo solo in m,aniera approssimata utilizzando poligoni con un grande numero di lati (ma non infiniti). Si noti che per risolvere questo problema equivale a calcolare π con numerose cifre decimali.

Quesito 9

Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.



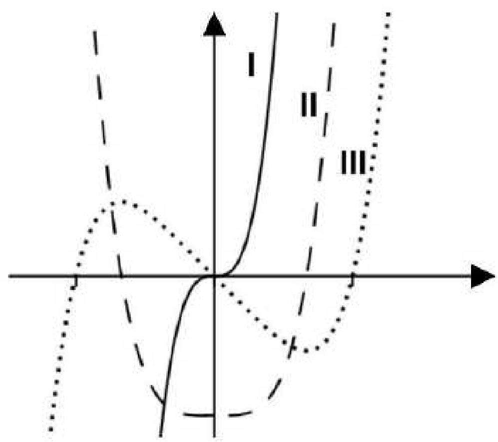
In un piano, il centro O, punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai vertici del triangolo rettangolo.
Un punto P dello spazio appartenente alla retta perpendicolare al piano del triangolo ABC e passante per O punto medio dell'ipotenusa, continua ad essere equidistante dai vertici ABC del triangolo

Quesito 9

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.



Dall'esame degli zeri, della crescenza e decrescenza e della concavità, l'unica risposta accettabile è data dalla D