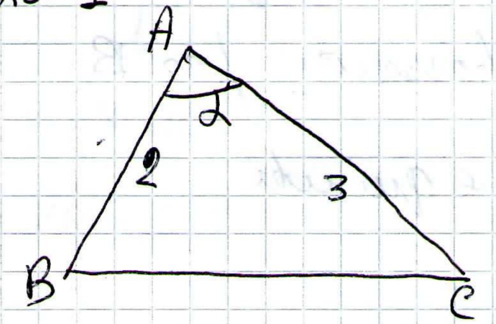
Quesito 1



Si ha $S(ABC) = 3$; $AB = 2$; $AC = 3$

Dalla relazione

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \operatorname{sen} \alpha \quad \text{avremo}$$

$$S = \frac{6 \operatorname{sen} \alpha}{2} \quad \text{e quindi}$$

$$3 \operatorname{sen} \alpha = 3$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Pertanto il triangolo è rettangolo

Applicando il teorema di Pitagora avremo

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Quesito 2

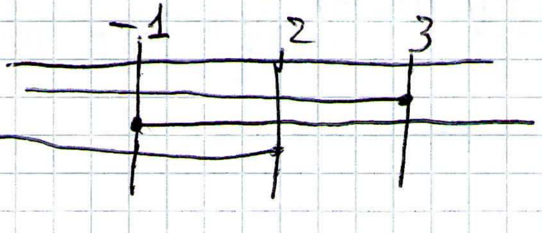
$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}}}$$

avremo il sistema

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3-x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ \sqrt{3-x} \leq 2 \\ 2 - \sqrt{3-x} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ 3-x \leq 4 \\ \sqrt{3-x} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x - 3 \geq -4 \\ 3 - x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Si ha il grafico



Il dominio sarà

$$D_f = [-1; 2]$$

Quesito 3

Consideriamo il fascio di rette passanti per B.
Avremo

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{e quindi}$$

$$y + 8 = m(x + 6)$$

$$r: \; mx - y + 6m - 8 = 0$$

La distanza della retta r dal punto A sarà

$$d(A; r) = \frac{|2m + 1 + 6m - 8|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|8m - 7|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Calcoliamo la distanza massima ovvero

$$y = \begin{cases} \dfrac{8m - 7}{\sqrt{m^2+1}} & \text{per } m \geq \frac{7}{8} \\ \dfrac{-8m+7}{\sqrt{m^2+1}} & \text{per } m < \frac{7}{8} \end{cases}$$

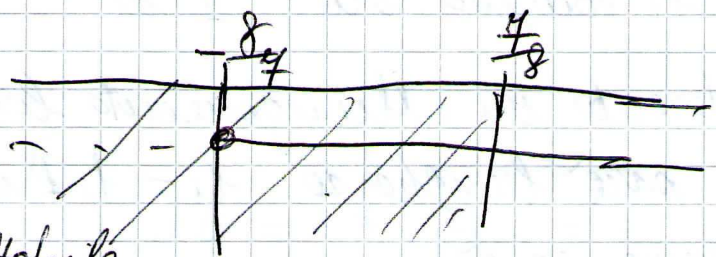
- $$y' = \begin{cases} \dfrac{8\sqrt{m^2+1} - \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}(8m-7)}{m^2+1} & \text{per } m \geq \frac{7}{8} \\ \dfrac{-8\sqrt{m^2+1} - \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}(-8m+7)}{m^2+1} & m < \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} ① \; \dfrac{8m^2 + 8 - 8m^2 + 7m}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}} & \text{con } m \geq \frac{7}{8} \\ ② \; \dfrac{-8m^2 - 8 + 8m^2 - 7m}{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}} & \text{con } m < \frac{7}{8} \end{cases}$$

avremo pertanto (1)

$$8+7m \geq 0$$

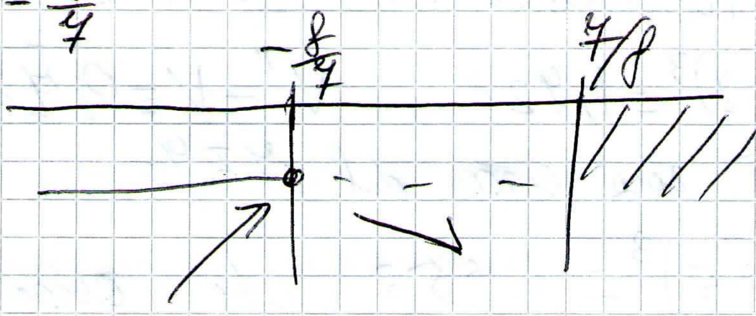
$$m \geq -\frac{8}{7}$$



che non è accettabile

(2) $7m+8 \leq 0$

$$m \leq -\frac{8}{7}$$



La distanza sarà massima per $m = -\frac{8}{7}$

la retta avrà equazione

$y+8 = -\frac{8}{7}(x+6)$ e quindi

$$8x+7y+104=0$$

Quesito 4

Indichiamo con h l'altezza del tronco di piramide e con a e b i lati delle basi. Il volume sarà

$V = \frac{h}{3}\left(A+B+\sqrt{A \cdot B}\right)$ essendo $A=a^2$; $B=b^2$

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2+b^2+\sqrt{a^2b^2}\right) = \frac{h}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)$$

Quesito 5

Consideriamo una valigia a forma di cubo di lato 1. Il Volume sarà $1\ m^3$

Considerando un allungamento lineare del 10% il lato avrà lunghezza $l_1 = 1,1\ m$

Il volume sarà

$$V' = l^3 = (1,1)^3 = 1,331\ m^3$$

$V' - V = 0,331$ cioè la capacità aumenta del 33%

Con un allungamento del 20% avremo

$$V'' = (1,2)^3 = 1,728 \qquad V'' - V = 0,728$$

la capacità sarà circa del 75%

$$V''' = (1,25)^3 = 1,953$$ che è circa il 100%

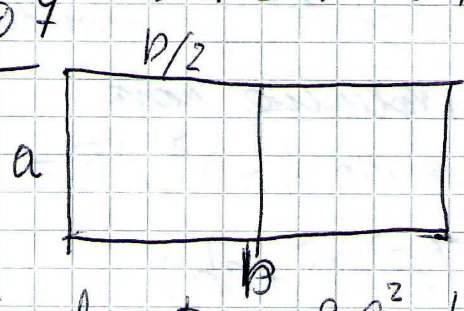
Quesito 6

Fissando la prima cifra si ha $6! = 720$ combinazioni di 6 numeri che insieme alla prima cifra individuano [numeri] di 7 cifre.

Il 721 numero sarà dato da un numero di 7 cifre che inizia col numero 2 cioè

2134567

Quesito 7



Si ha $ab = 1$ inoltre

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = a^2 = \frac{b^2}{2}$$

Si ha il sistema $\begin{cases} a^2 = \frac{b^2}{2} \\ ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{2}$

$$b = \sqrt[4]{2}\ ;\ a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

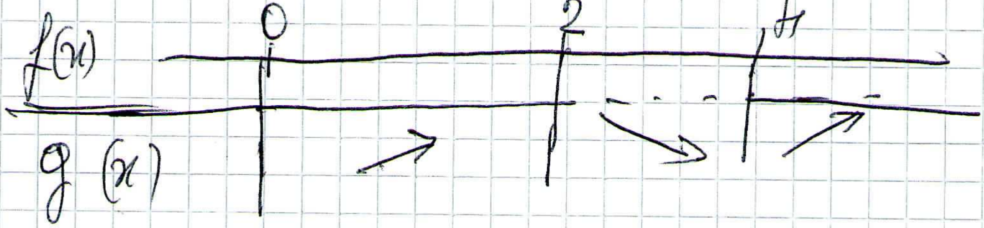
Quesito 8

Per il teorema di Torricelli

$$g'(x) = f(x)$$

la funzione $g(x)$ è crescente per $f(x) > 0$, decrescente per $f(x) < 0$

Si ha



Il minimo si ha quindi per $x = 4$

Quesito 9

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^2}$$

essendo $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; avremo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Quesito 10

La risposta esatta è la A perché nell'intervallo $[-2;2]$ la $f(x)$ è decrescente, pertanto la derivata prima deve essere negativa; inoltre nei punti -2 e 2 la funzione presenta un massimo ed un minimo per cui nei punti di ascissa -2 e 2 la derivata prima si annulla