Quesito 1

Essendo $f\,'(x) = -2x^2 + 6$ otteniamo

$$\int(-2x^2+6)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$$

Essendo inoltre il coefficiente angolare $m = -2$ avremo

$f\,'(x_0) = -2$ per cui

$$-2x^2 + 6 = -2$$
$$x = \pm 2$$

Essendo nel secondo quadrante avremo $x = -2$

Poiché la retta passa per il punto $P(-2;9)$ $f(-2) = 9$ otteniamo

$$\frac{16}{3} - 12 + c = 9 \quad \text{da cui} \quad c = \frac{47}{3}$$

La funzione sarà

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$$

Quesito 2

La retta passante per i punti di coordinate $(0;r)$ e $(h;R)$ avrà equazione

$$\frac{y-R}{r-R} = \frac{x-h}{-h} \quad \text{quindi}$$

$hy - hR = (x-h)(R-r)$ per cui

$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$

Il volume del tronco di cono sarà

$$V = \pi\int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)x + r\right]^2 dx = \pi\int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + r^2 + 2r\left(\frac{R-r}{h}\right)x\right]dx =$$
$$\pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{h^3}{3} + r^2h + 2r\left(\frac{R-r}{h}\right)\frac{h^2}{2}\right] = \pi\left[(R-r)^2\frac{h}{3} + r^2h + r(R-r)h\right] =$$
$$= \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + r^2 + Rr\right]$$

Quesito 3

La distribuzione binomiale sarà

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Dove $p = \frac{1}{2}$ $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ $n = 6$

Otteniamo testa al più due volte per cui

$$p[k=0;k=1;k=2]=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=$$
$$=\frac{1}{2^6}(1+6+15)=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$$

Quesito 4

$y=\dfrac{\ln x}{x}$ avremo

$$y'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y''=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x[1+2(1-\ln x)]}{x^4}=-\frac{1}{x^3}(3-2\ln x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

Sostituendo nelle equazioni differenziali sarà verificata la 4 infatti avremo

$$x^2\frac{2\ln x-3}{x^3}+x\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-3+1-\ln x+2}{x}=\frac{\ln x}{x}$$

Quindi $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$

Quesito 5

Il vettore direzione del piano è il vettore $V(1;1;-1)$

Biondi la retta cercata ha equazioni

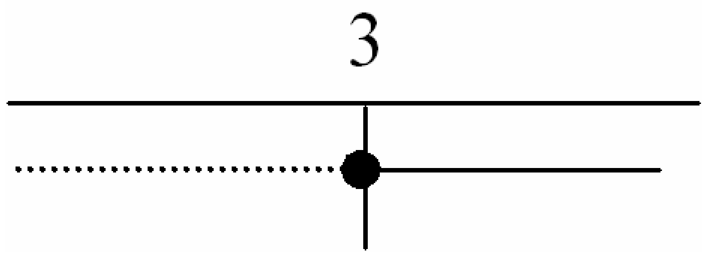
$$\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=-t\end{cases}\quad \text{ovvero}\begin{cases}x=y\\ x=-z\end{cases}\ \text{cioè}\ \begin{cases}x-y=0\\ x+z=0\end{cases}$$

Quesito 6

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2$$

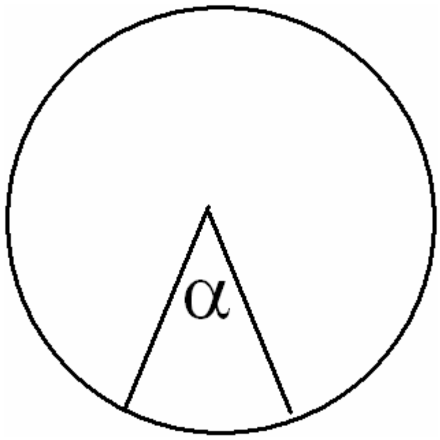
La derivata prima sarà

$$f'(x)=2x-2+2x-4+2x-6+2x-8+2x-10$$
$$f'(x)=10x-30\geq 0\quad \text{e quindi}\quad x\geq 3$$



x = 3 è il minimo di f

Quesito 7



Si hanno n triangoli isosceli dove

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

L'area del triangolo sarà

$$S = \frac{1}{2} rr \sin\frac{2\pi}{n}$$

L'area del poligono sarà

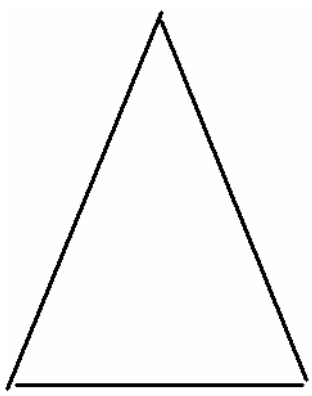
$$nS = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

Ponendo $x = \frac{2\pi}{n}$ avremo $n = \frac{2\pi}{x}$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} nr^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{2\pi}{x} r^2 \sin x = \pi r^2$$

Che è l'area del cerchio

Quesito 8



Poichè la somma degli angoli interni è π la somma delle tre aree è l'area del semicerchio di raggio 2 ovvero

$$S=\frac{4\pi}{2}=2\pi$$

l'area del triangolo è data dalla formula di Erone

$$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$ con a=b=6 c=5

Avremo

$$A=\sqrt{\frac{17}{2}\left(\frac{17}{2}-6\right)^2\left(\frac{17}{2}-5\right)}=\sqrt{\frac{2975}{16}}$$

La probabilità sarà

$$P=\frac{A-S}{A}=0,539$$

Quesito 9

Per applicare il teorema di Lagrange la funzione deve essere continua in $[0;2]$ e derivabile in $]0;2[$
Si ha

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & per \quad 0\le x\le 1 \\ x^2-kx+k & per \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

Per cui

$$f(1)=\begin{cases} 1 & per \quad 0\le x\le 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-kx+k\right)=1 & per \quad 1<x\le 2\end{cases}$$ la funzione è continua per $x=1$

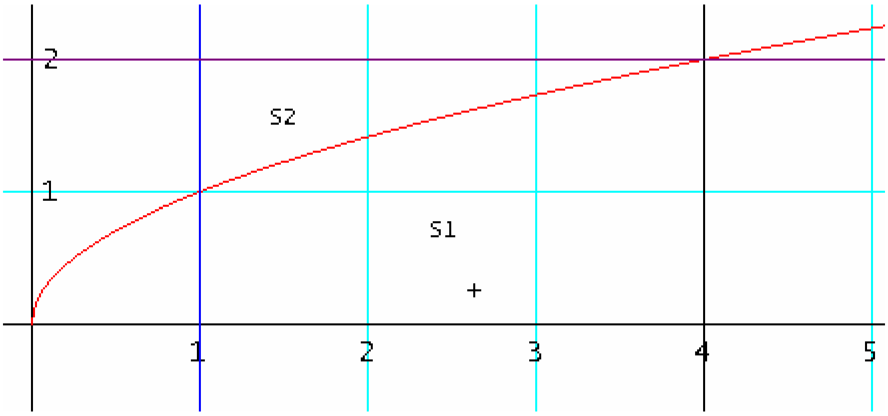
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & per \quad 0\le x\le 1 \\ 2x-k & per \quad 1<x\le 2\end{cases}$$ avremo $2-k=3 \qquad k=-1$

Nel primo tratto avremo

$3x^2=\frac{5}{2} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ ed è accettabile solamente $x=+\sqrt{\frac{5}{2}}$

Nel secondo tratto avremo $2x+1=\frac{5}{2}$ da cui $x=\frac{3}{4}$ che non è accettabile

Quesito 10



L'area del rettangolo è $A = 6$

$$S_1 = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}$$

$$S_2 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$$

Il rapporto delle aree sarà

$$r = \frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{2}$$