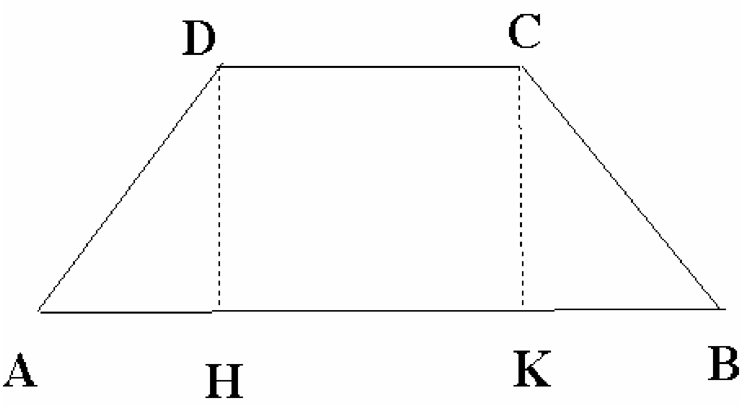
Quesito 1

Indichiamo con $DC = l$ la base minore del trapezio e con h l'altezza.



La base maggiore sarà $AB = 4l$; inoltre $AH = \frac{3}{2}l$, $HK = l$.

Facendo ruotare il trapezio attorno alla base maggiore otteniamo un cilindro sormontato da due coni esterni uguali.
Il volume V' del solido sarà:

$$V' = V_{cil} + 2V_{cono} = \pi h^2 l + 2\left(\frac{\pi h^2}{3}\frac{3}{2}l\right) = 2\pi h^2 l$$

Nella rotazione del trapezio attorno alla base minore otteniamo un cilindro e due coni interni.
Il volume V'' del solido sarà:

$$V'' = V_{cil} - 2V_{cono} = \pi h^2 4l - 2\left(\frac{\pi h^2}{3}\frac{3}{2}l\right) = 3\pi h^2 l$$

Il rapporto fra i due volumi sarà:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{2\pi h^2 l}{3\pi h^2 l} = \frac{2}{3}$$

Quesito 2

Il tetraedro regolare è un poliedro le cui facce sono 4 triangoli equilateri uguali.
Inoltre poiché hanno lo stesso numero di facce, i due tetraedri risultano simili.

Essendo $\frac{A'}{A''} = 2$

Avremo

$$\frac{l'}{l''} = \sqrt{2}$$

che è il rapporto di similitudine.
Il rapporto fra i volumi sarà uguale al cubo del rapporto di similitudine. Si ha quindi

$$\frac{V'}{V''} = 2\sqrt{2}$$

Quesito 3

Se a,b,c,d sono numeri reali e se
$a > b$ e $c > d$
allora la risposta (B) è corretta, infatti da
$a - d > b - c$ si ha
essendo
$a > b \Rightarrow a = b + x$ con $x > 0$
$c > d \Rightarrow c = d + y$ con $y > 0$
e quindi
$b + x - d > b - d - y$
e quindi
$x > -y$
che è sempre verificata.
Si può procedere anche nel seguente modo
Sommandole due espressioni membro a membro otteniamo

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

e quindi
$a - d > b - c$

Quesito 4

Siano *a* e *b* due numeri reali positivi.
Essendo la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ e la media geometrica $\sqrt{ab}$ Se $a \neq b$ la media aritmetica è maggiore della media geometrica, infatti

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

elevando al quadrato otteniamo

$$\frac{(a+b)^2}{4} > ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab > 0$$

$$(a+b)^2 > 0$$

Se i numeri *a* e *b* sono uguali, la media aritmetica risulta uguale alla media geometrica.
Pertanto la proposizione assegnata risulta falsa perché non è specificato che $a \neq b$.

Quesito 5

Affinché si abbia una identità dovrà essere

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

e quindi

$$a=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4} \qquad b=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4}$$

Per la dimostrazione di questa relazione vedi appunti di matematica – integrazione funzioni razionali fratte -

Quesito 6

Essendo la funzione assegnata continua nell'insieme dei numeri reali, risulta continua nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Per il teorema di Weierstrass (dal nome del matematico tedesco Karl Weierstrass – 1815 - 1897).

Pertanto la funzione ammette massimo e minimo assoluti.

Si ha:

$$f(x)=(2x-1)^7(4-2x)^5$$

$$f'(x)=14(2x-1)^6(4-2x)^5-10(4-2x)^4(2x-1)^7$$

$$f'(x)=2(2x-1)^6(4-2x)^4(33-24x)$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad x=2 \qquad x\le\frac{11}{8}$$

Inoltre

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=0 \quad \text{minimo assoluto}$$

$$f\left(\frac{11}{8}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^7\left(\frac{5}{4}\right)^5\cong 153,4.. \quad \text{massimo assoluto.}$$