Quesito 7

Essendo

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt \qquad \text{con } x > 0$$

si ha

$$f(x) = [t \ln t - t]_x^{x+1} = (x+1)\ln(x+1) - x - 1 - x\ln x + x$$

e quindi

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \ln x - 1 \qquad \text{per cui}$$

$$f'(x) = \ln\frac{x+1}{x}$$

Oppure considerando $a > 0$

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt = \int_x^a \ln t dt + \int_a^{x+1} \ln t dt = -\int_a^x \ln t dt + \int_a^{x+1} \ln t dt$$

per il teorema di Torricelli Barrow otteniamo

$$f'(x) = -\ln x + \ln(x+1) = \ln\frac{x+1}{x}$$

Quesito 8

Essendo la funzione continua in $[1;3]$ e derivabile in $]1;3[$ possiamo applicare il teorema di Lagrange:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1}$$

Essendo $f(1) = 1$ si ha

$$f(3) = 2f'(c) + 1 \qquad (1)$$

Essendo

$$0 \le f'(c) \le 2$$

per la (1) otteniamo

$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 1$$

$$f'(c) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 5$$

Pertanto avremo che

$$1 \le f(3) \le 5$$

Quesito 9

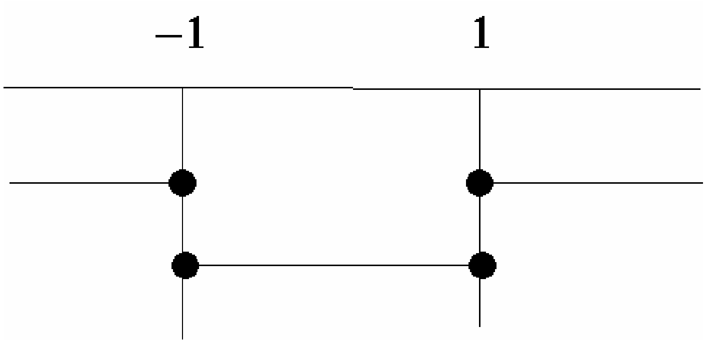
La funzione

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

esiste per i valori appartenenti al suo dominio che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge 0 \end{cases}$$

Otteniamo il grafico



Quindi

$\text{dom}\, f = \{-1;1\}$

Il luogo è costituito dai due punti
$(-1;0)$ e $(1;0)$
La risposta corretta è la B).

Quesito 10

Posto $2x = t$ otteniamo

$x = \frac{1}{2}t \qquad dx = \frac{1}{2}dt$

Per $x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 6$ per cui

$$\int_0^3 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{2}b$$

quindi

$\frac{1}{2}b = \ln 2$

$b = \ln 4$

inoltre si ha

$$\int_1^3 f(2x)dx$$

con lo stesso procedimento

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 6$ e quindi

$$\frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^6 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt\right] = \frac{1}{2}(b-a)$$

pertanto:

$$\frac{1}{2}(b-a) = \ln 4$$
$$(b-a) = 2\ln 4$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} b = \ln 4 \\ (b-a) = 2\ln 4 \end{cases}$$ da cui

$$a = \ln\frac{1}{4}$$

Le soluzioni sono:

$b = \ln 4$ $\qquad$ $a = \ln\frac{1}{4}$