TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Generalità sulle affinità

Chiamasi affinità o trasformazione lineare una corrispondenza biunivoca tra due piani o tra punti dello stesso piano che trasforma rette in rette conservando il parallelismo.
Dati due punti del piano : P(*x*, *y*) e P'(*x'*,*y'*), diciamo che essi si corrispondono in un'affinità φ se le loro coordinate sono espresse linearmente da equazioni del tipo :

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad (1)$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, p, q$ sono numeri reali e

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \qquad (2)$$

Se $\det A = 0$, la (1) si dice affinità degenere e non è più una biiezione.

Definizione 1 - Una biiezione φ che ad ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ associa un punto $P' = \varphi(P)$

$$\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 : (x, y) \longrightarrow (x', y')$$

si dice affinità e le (1) con $\det A \neq 0$ si dicono equazioni dell'affinità.

Risolvendo il sistema lineare (1) nelle incognite x, y otteniamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A}\left(a_{22}x' + a_{12}y' + d\right) \\ y = \dfrac{1}{\det A}\left(-a_{21}x' + a_{11}y' + e\right) \end{cases} \qquad (3)$$

dove

$$d = a_{12}q - a_{22}p$$
$$d = a_{21}p - a_{11}q$$

Definizione 2 - Si dice affinità inversa della (1) la funzione φ^{-1} che associa a un punto $P'(x', y')$ il punto $P = \varphi^{-1}(P)$.

Le equazioni (3) si dicono le equazioni dell'affinità inversa della (1).

Definizione 3 - Un punto $P \in \mathbf{R}^2$ si dice unito o fisso per una trasformazione φ , se $\varphi(P) = P$, cioè se il trasformato di P è P stesso.
In particolare se le equazioni del sistema si riducono a delle identità, allora tutti i punti del piano $\mathbf{R}^2$ sono uniti.
Il punto fisso delle (1), ammesso che l'affinità ne possiede, si ottiene ponendo

$$x' = x \qquad y' = y$$

La soluzione (x, y) si dice centro dell'affinità e le (1) si dicono le equazioni di una affinità centrale.
Teorema 1 - Una affinità viene univocamente determinata da tre coppie (A, A') , (B, B') , (C,C') di punti corrispondenti tali che né i punti A, B, C né i loro corrispondenti A', B', C' stiano su una medesima retta.
Infatti, imponendo alle (1) di contenere i punti A, B, C ed i loro corrispondenti, si ottiene un sistema lineare di 6 equazioni nelle 6 incognite

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, p, q$$

che per le ipotesi fatte ammette una sola soluzione.

Le affinità godono di particolari proprietà :
trasformano rette in rette
trasformano rette incidenti in rette incidenti
trasformano rette parallele in rette parallele
trasformano il punto medio M di un segmento nel punto M' del segmento corrispondente
conservano costante il rapporto delle aree di figure corrispondenti ; tale rapporto costante è chiamato rapporto di affinità ed è uguale a

$$k = |\det A|$$

trasformano cerchi o ellissi in cerchi o ellissi
trasformano parabole in parabole, iperboli in iperboli.

Equazione di una affinità con un punto unito nell'origine

Sia data l'affinità di equazione

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

affinché l'origine O(0, 0) sia un punto unito, deve essere

$$\begin{cases} 0 = a_{11}0 + a_{12}0 + p \\ 0 = a_{21}0 + a_{22}0 + q \end{cases}$$

da cui segue che

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

Per cui, le equazioni di una generica affinità avente come punto unito l'origine sono

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

Dilatazioni

Le particolari affinità che hanno gli assi coordinati e l'origine uniti, sono le dilatazioni.
Definizione - Si dice dilatazione un'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \end{cases} \qquad \text{con } p, q \in \mathbf{R} - \{0\} \qquad (1)$$

Questa terminologia è dovuta al fatto che tali trasformazioni non mantengono invariate le distanze, per cui se P e P' , Q e Q' sono coppie di punti corrispondenti, si ha

$d(P,Q) < d(P',Q')$ o

$d(P,Q) > d(P',Q')$

Nel primo caso la dilatazione determina un allungamento o una dilatazione di PQ, nel secondo caso provoca un rimpicciolimento o una contrazione di PQ.
Se nella (1) è $q = 1 \; e \; p \neq 1$ si ha una dilatazione orizzontale, più precisamente,

se $|p| > 1$

si ha una dilatazione concorde o discorde secondo che risulti $p > 1 \; o \; p < 1$.

Se $|p| < 1$

si ha una contrazione concorde o discorde secondo che

$p > \in \left]0,1\right[$ o

$p > \in \left]-1,0\right[$

Se nella (1) $p = 1 \; e \; q \neq 1$ si ha una dilatazione verticale, cioè si ha una dilatazione se

$|q| > 1$

una contrazione se

$|q| < 1$.

Una trasformazione di equazioni

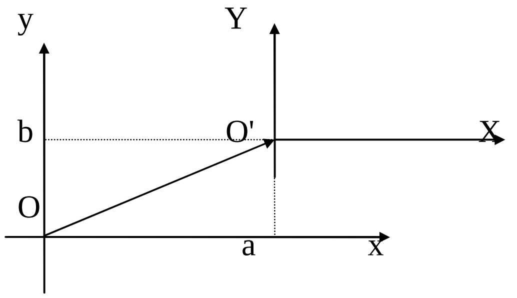
$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \qquad D = k^2 \qquad \textit{con a e b} \text{ non entrambi nulli}$$

rappresenta una **dilatazione** in cui l'unico punto unito è $C\left(\frac{a}{1-k},\frac{b}{1-k}\right)$ che è il centro della dilatazione. In particolare, se k = 1 si ha

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad D = 1$$

che rappresenta **una traslazione di vettore** $(a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j})$. Questa porta l'origine nel punto O' (a, b), con **i** e **j** versori degli assi.

Se a = 0 o b = 0 la traslazione è rispettivamente verticale o orizzontale.



Similitudine

Definizione - Si chiama similitudine piana una biiezione φ di $\mathbf{R}^2$ in se stesso che moltiplica per k le distanze, cioè

$$d(P', Q') = k\, d(P, Q) \quad \forall P, Q \in \mathbf{R}^2 \qquad (1)$$

con $P' = \varphi(P),\ Q' = \varphi(Q)$

e dove k è un numero reale positivo, per cui :

In una similitudine il rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti è costante.

La costante k > 0 prende il nome di rapporto o costante di similitudine.

Per determinare le condizioni analitiche cui devono soddisfare i coefficienti dell'affinità

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad (2)$$

affinché $\forall P, Q \in \mathbf{R}^2$ si verifichi la (1), consideriamo due punti $P(x_1, y_1); Q(x_2, y_2)$ e i loro corrispondenti $P'(x'_1, y'_1); Q'(x'_2, y'_2)$, che per l'affinità (2) hanno coordinate

$$P'(x'_1, y'_1) = (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + p, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + q)$$
$$Q'(x'_2, y'_2) = (a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + p, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + q)$$

Essendo

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(P',Q') = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

avremo

$$d(P',Q') = \sqrt{\left[a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)\right]^2 + \left[a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)\right]^2} =$$
$$= \sqrt{a_{11}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{11}a_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_{12}^2(y_2 - y_1)^2 + a_{21}^2(x_2 - x_1)^2 +}$$
$$\overline{+ 2a_{21}a_{22}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_2^2(y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2}$$

Affinché sia valida la (1) deve essere

$$k\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

e quindi

$$k\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2}$$

cioè si dovrà avere

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = k^2 & (3) \\ a_{11}a_{22} + a_{21}a_{22} = 0 & (4) \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = k^2 & (5) \end{cases}$$

Ricavando a_{22} dalla seconda equazione del sistema e sostituendo nella terza si ha

$$a_{22} = -\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}}$$

e quindi

$$a_{12}^2 + \left(-\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}}\right)^2 = k^2$$
$$a_{12}^2 a_{21}^2 + a_{11}^2 a_{12}^2 = k^2 a_{21}^2$$

cioè

$$a_{12}^2\left(a_{21}^2 + a_{11}^2\right) = k^2 a_{21}^2$$

Per la prima equazione, essendo

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = k^2$$

avremo

$$a_{12}^2 k^2 = k^2 a_{21}^2$$

e quindi

$$a_{12}^2 = a_{21}^2$$
cioè
$$a_{12} = a_{21} \qquad \text{oppure} \qquad a_{12} = -a_{21}$$
Tenendo conto delle relazioni trovate, la seconda equazione del sistema diviene
$$a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0$$
cioè
$$a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$$
oppure
$$a_{11}a_{12} - a_{12}a_{22} = 0$$
cioè
$$a_{12}(a_{11} - a_{22}) = 0$$
Essendo $a_{12} \neq 0$ si ha
$$a_{22} = -a_{11} \qquad \text{oppure} \qquad a_{22} = a_{11}$$
Avremo pertanto
$$(a_{12} = a_{21}) \Rightarrow (a_{22} = -a_{11})$$
$$(a_{12} = -a_{21}) \Rightarrow (a_{22} = a_{11})$$
Se $a_{22} = -a_{11}$ e $a_{12} = a_{21}$ le equazioni della trasformazione (2) divengono

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x - a_{11}y + q \end{cases} \qquad (6)$$

dove
$$\det A = -(a_{11}^2 + a_{21}^2) = -k^2$$

Se $a_{12} = -a_{21}$ e $a_{22} = a_{11}$ le equazioni della trasformazione (2) divengono

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x -_{12} y + p \\ y' = a_{12}x + a_{11}y + q \end{cases} \qquad (7)$$

dove
$$\det A = a_{11}^2 + a_{21}^2 = k^2$$
e il rapporto di similitudine
$$k = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$$
è uguale alla radice quadrata del rapporto di affinità $k = \sqrt{|\det A|}$
Il punto unito della trasformazione si dice centro di similitudine.

Definizione - Si dice che una similitudine è concorde se trasforma una figura F in un'altra F', i cui vertici si susseguono nello stesso senso con cui si succedono in F ; altrimenti la similitudine si dice inversa o discorde.

Per cui una similitudine concorde ha equazioni della forma

$$\varphi: \begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x + a_{11}y + q \end{cases}$$

invece una similitudine discorde ha equazioni della forma

$$\varphi: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x - a_{11}y + q \end{cases}$$

Si dimostra inoltre che una similitudine trasforma

- punti susseguentisi in punti susseguentisi
- rette in rette
- segmenti in segmenti
- semipiani in semipiani
- angoli in angoli di eguale ampiezza
- aree in aree di rapporto k^2 (ossia $S' = k^2 S$)
- cerchi in cerchi
- ellissi in ellissi

Inoltre in una similitudine è costante il rapporto fra segmenti corrispondenti. In particolare la similitudine muta rette perpendicolari in rette perpendicolari.