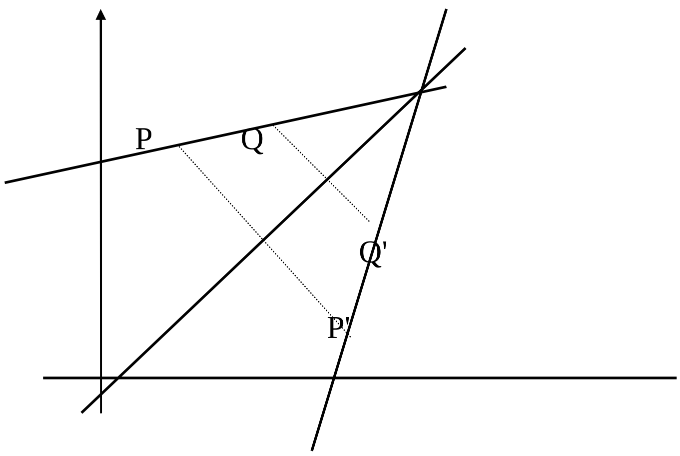
Simmetrie assiali

Definizione - Si chiama simmetria assiale ogni isometria che trasforma un punto P nel punto P' simmetrico di P rispetto ad una retta prefissata, detta asse di simmetria.



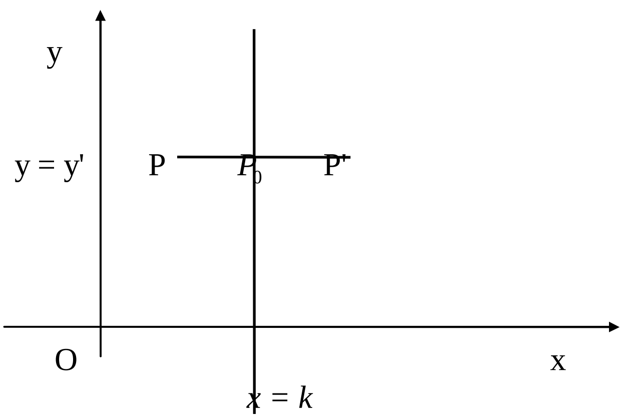
Ne segue che l'asse di simmetria è il luogo di punti uniti, inoltre punti corrispondenti sono equidistanti dall'asse.

Simmetria rispetto alla retta s di equazione *x = k*.

Sia s una retta parallela all'asse y e P'(x',y') il simmetrico di P(x,y) rispetto alla retta s

Osservando il grafico si ha

:



$y' = y$

essendo P_0 il punto medio di PP' si ha

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x + x'}{2} \\ y = y' \end{cases} \qquad dove\ x_0 = k$$

e quindi

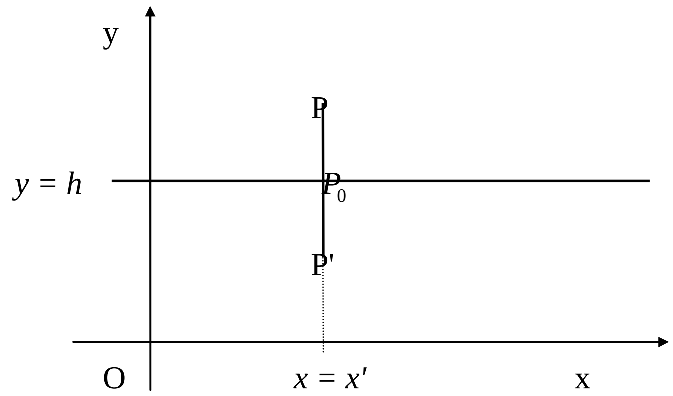
$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Se k = 0 si ha la simmetria rispetto all'asse y di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Simmetria rispetto alla retta r di equazione *y = h*

Dal grafico si ha



$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{y + y'}{2} \quad dove\ y_0 = h \\ x' = x \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2h - y \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Se h = 0 si ha la simmetria rispetto all'asse x che ha equazioni :

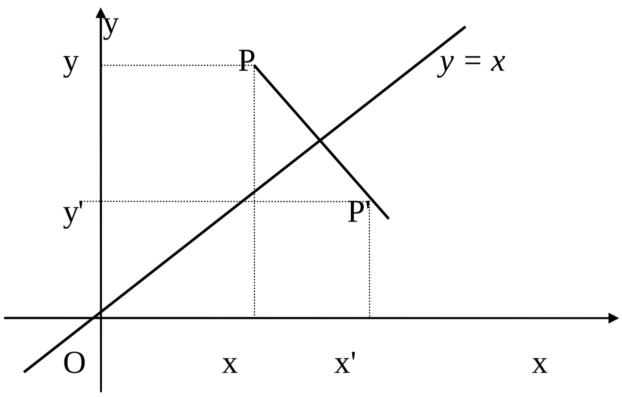
$$\begin{cases} y' = -y \\ x' = x \end{cases} \qquad \det A = -1$$

Simmetria rispetto alla bisettrice y = x

Si dice simmetria assiale di asse la retta y = x l'isometria di equazione

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad \det A = -1$$

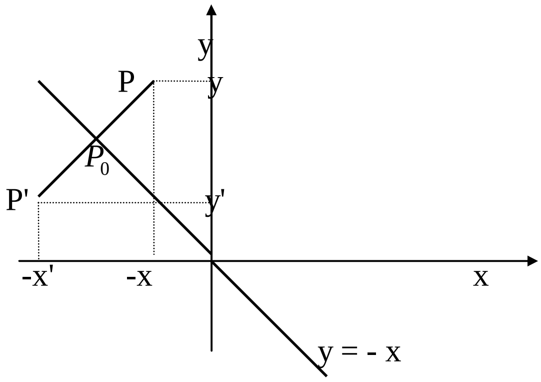
come è facile osservare dal grafico.



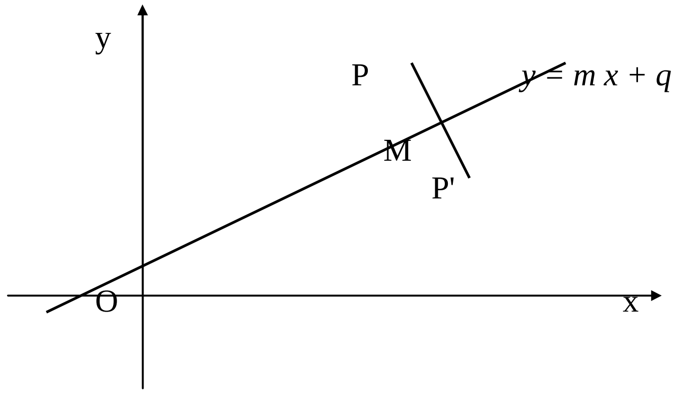
Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$

Si dice simmetria assiale di asse la retta $y = -x$ l'isometria di equazione

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \qquad \det A = -1$$



Simmetria rispetto alla retta r : *y = m x + q*



osserviamo che due punti P(x, y) e P'(x',y') sono simmetrici rispetto alla retta r se si verificano le seguenti condizioni :

- il punto $M\left[\frac{1}{2}(x+x');\frac{1}{2}(y+y')\right] \in r$
- P e P' appartengono alla retta perpendicolare ad r.

Queste condizioni si traducono nelle equazioni :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y+y') = m\cdot\frac{1}{2}(x+x')+q \\ \frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto a x', y', si ottengono le equazioni della simmetria rispetto alla retta r.

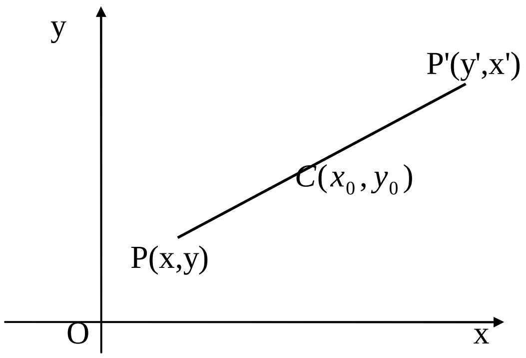
$$x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mq}{1+m^2}$$

$$y' = \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2}$$

Come caso particolare si possono, da questa, ricavare le simmetrie rispetto alle bisettrici degli assi.

Simmetria centrale o equinversione

Si dice simmetria centrale di centro C la trasformazione di $\mathbf{R}^2$ in se stesso che porta C in C e che ad ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ diverso da C, associa il punto $P' \in \mathbf{R}^2$ tale che C sia il punto medio del segmento PP'.
Se $C(x_0, y_0)$ $P(x,y)$ $P(x',y')$ si ha



$$\varphi : \begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = x_0 \\ \dfrac{y+y'}{2} = y_0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \qquad \det A = 1$$

che rappresenta una simmetria centrale di centro C che è l'unico punto unito della trasformazione.

Osservazione

Affinché si abbia una simmetria centrale i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ devono essere paralleli.

Se $x_0 = y_0 = 0$ si ottiene **la simmetria rispetto all'origine**.
Per verificare se due curve : $\Gamma : y = f(x)$ *e* $\Gamma' : y = f_1(x)$ possiedono un centro di simmetria $C(x_0, y_0)$ si pone nella equazione $y = f_1(x)$ al posto di x $2x_0$-x ed al posto di y $2y_0$-y e si uguaglia la funzione ottenuta alla f (x) data.
Successivamente , mediante il principio di identità dei polinomi si ricavano i valori di h e k che soddisfano il sistema.

Omografie

Consideriamo il completamento proiettivo P dello spazio affine E con l'aggiunta dei punti impropri delle rette di E .
Si dice omografia di P ogni trasformazione biiettiva che trasforma rette proiettive in rette proiettive. La sua equazione è:

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \rho \neq 0 \quad \det A \neq 0$$

Affinché si abbia un punto unito si dovrà sostituire x_1' con x_1 ecc.
Il sistema omogeneo associato deve ammettere soluzioni non nulle, per cui risulta necessario e sufficiente che si annulli il determinante dei coefficienti del sistema

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

che dicesi equazione caratteristica dell'omografia e ammette tre radici (x_1, x_2, x_3) in generale distinte delle quali nessuna risulta nulla altrimenti sarebbe nullo il determinante $|a_{ij}|$ che è escluso $|a_{ij}| \neq 0$

Prodotto di affinità

Siano

$$\varphi : \begin{cases} X = b_{11}x + b_{12}y + r \\ Y = b_{21}x + b_{22}y + s \end{cases} \qquad (1)$$

e

$$\psi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad (2)$$

due affinità del piano in sé, si ha la

Definizione - Si dice prodotto operatorio o semplicemente prodotto di ψ e φ e si scrive $\varphi \circ \psi$
l'affinità δ che si ottiene applicando prima ψ e poi φ

$$\delta : \begin{cases} X = b_{11}(a_{11}x + a_{12}y + p) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y + q) + r \\ Y = b_{21}(a_{11}x + a_{12}y + p) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y + q) + s \end{cases}$$

$$\delta : \begin{cases} X = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y + b_{11}p + b_{12} + r \\ Y = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y + b_{21}p + b_{22}q + s \end{cases}$$

posto

$b_{11}p + b_{12} + r = e$

$b_{21}p + b_{22}q + s = f$

avremo

$$\delta : \begin{cases} X = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y + e \\ Y = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y + f \end{cases}$$

Si può provare facilmente che

a) il prodotto di due affinità è un'affinità, per cui l'insieme A delle affinità è chiuso rispetto all'operazione $\circ$

b) l'operazione $\circ$ è associativa

$$\varphi \circ (\psi \circ \delta) = (\varphi \circ \psi) \circ \delta$$

c) $\forall\ \varphi \in A \quad \exists$ un'affinità $I \in A$ tale che

$$I \circ \varphi = \varphi \circ I = \varphi$$

d) $\forall\ \varphi \in A, \quad \exists! \varphi^{-1} \in A : \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = I$

Poiché

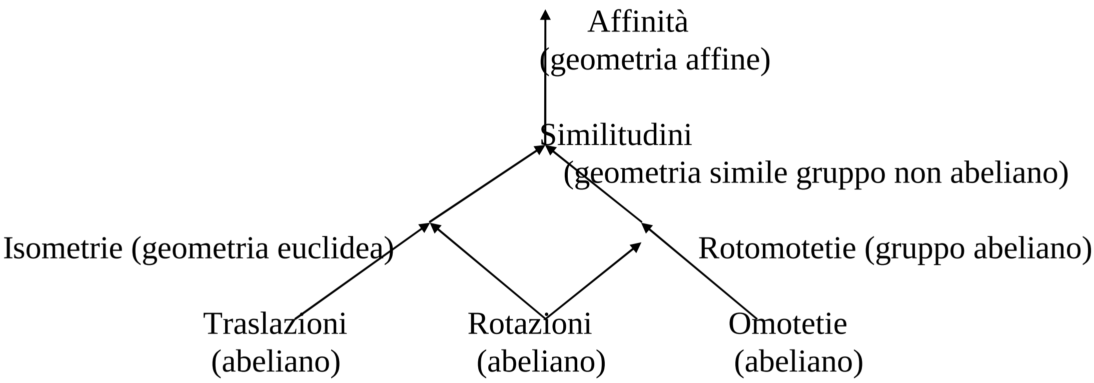
$$\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$$

Il prodotto di affinità non è commutativo.

Pertanto la struttura $(A, \circ)$ è un gruppo non commutativo.

Le affinità formano un gruppo rispetto al prodotto di trasformazioni avente come sottogruppo il ,gruppo delle similitudini e quindi il gruppo delle isometrie.

Si ha quindi il grafo



CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO

Rototraslazione

Per determinare le coordinate del punto P(x, y) rispetto ad un nuovo sistema di riferimento $O'x'y'$ rototraslato rispetto ad O x y, faremo uso delle formule :

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha + b \end{cases} \quad \text{e, viceversa} \quad \begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

che si ottengono dalla composizione dei casi precedenti.