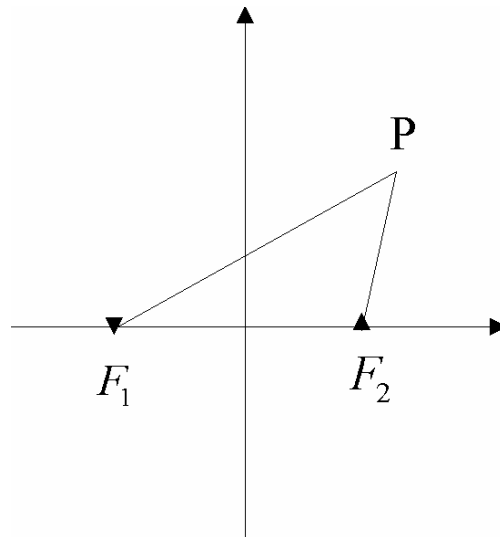


Iperbole

Def. Dicesi iperbole il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza della distanza da due punti fissi detti fuochi.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

Indichiamo con F_1 ed F_2 i due fuochi e consideriamo come asse x la retta passante per essi e come asse y la retta ad essa perpendicolare e passante per il punto medio di $\overline{F_1F_2}$.



Detta $2c$ la loro distanza, i fuochi avranno coordinate $F_1(-c;0)$ ed $F_2(c;0)$

Avremo quindi

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Elevando al quadrato ambo i membri otteniamo

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 4a^2$$

$$x^2 + c^2 - 2cx + 2y^2 + x^2 + 2cx + c^2 - 2\sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 4a^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 2\sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 4a^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 2a^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]}$$

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]}$$

Elevando al quadrato avremo

$$x^4 + x^2y^2 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + x^2y^2 + y^4 + c^2y^2 - 2a^2y^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^4 - 2a^2c^2 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 - 2a^2c^2 + 4a^4 = (x^2 - 2cx + c^2 + y^2)(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$x^4 + x^2y^2 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + x^2y^2 + y^4 + c^2y^2 - 2a^2y^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^4 - 2a^2c^2 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 - 2a^2c^2 + 4a^4 = x^4 + 2cx^3 + c^2x^2 + x^2y^2 - 2cx^3 - 4c^2x^2 - 2c^3x - 2cxy^2 + c^2x^2 + 2c^3x + c^4 + c^2y^2 + x^2y^2 + 2cxy^2 + c^2y^2 + y^4$$

$$-4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 4c^2x^2 = 4a^2c^2 - 4a^4$$

Essendo $2c > 2a$ (in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due), poniamo

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Avremo quindi

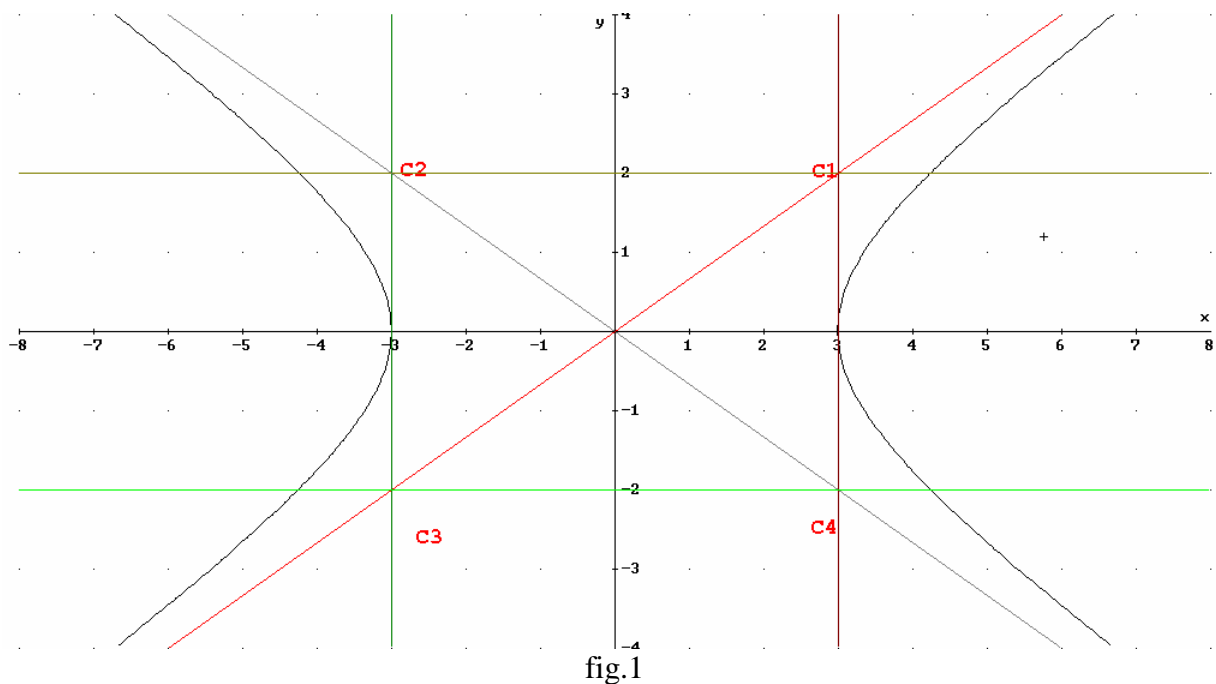
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2 otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

che è l'equazione canonica dell'iperbole.



Per $x = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{non ammette soluzioni, perciò la curva non interseca l'asse } y$$

Per $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad x^2 = a^2 \quad x = \pm a$$

la curva interseca l'asse x nei punti $A_1(-a; 0)$ $A_2(a; 0)$ che vengono chiamati vertici dell'iperbole.

L'asse x prende il nome di asse trasverso, mentre l'asse y prende il nome di asse non trasverso

Osservazione: Risolvendo l'equazione rispetto ad y otteniamo

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

dovrà quindi essere

$$x^2 - a^2 \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad x \leq -a \quad \vee \quad x \geq a$$

per cui la curva sta al di fuori della striscia delimitata dalle rette $x = -a$ ed $x = a$

Essendo $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$, tracciando le rette parallele all'asse x di equazione $y = \pm b$ e le rette di equazione $x = \pm a$ otteniamo un rettangolo di vertici

$$C_1(a;b) \quad C_2(-a;b) \quad C_3(-a;-b) \quad C_4(a;-b)$$

Per la simmetria tra i punti $C_1(a;b)$ e $C_3(-a;-b)$ ed i punti $C_2(-a;b)$ e $C_4(a;-b)$ rispetto all'origine, le rette C_1C_3 e C_2C_4 hanno equazioni

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Queste rette vengono chiamate asintoti dell'iperbole perché risultano tangenti alla curva nei suoi punti impropri.

Infatti consideriamo un generico punto P dell'iperbole nel primo quadrante ed il suo corrispondente

$$P' \text{ sulla retta } y = \frac{b}{a}x. \text{ Essendo } P\left(x; \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) \text{ e } P'\left(x; \frac{b}{a}x\right)$$

La loro distanza sarà

$$d(P, P') = \left| \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right| = \left| \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \right|$$

quando $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \left| \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \right|$$

Razionalizzando il numeratore otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \left| \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{b}{a} \left(\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) \right| = 0$$

Definiamo eccentricità dell'iperbole il rapporto $e = \frac{c}{a}$

Essendo $c > a$ si ha che $e > 1$

Iperbole equilatera

Se $a = b$ l'equazione (1) diviene

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{2}$$

che è l'equazione dell'iperbole equilatera, i cui asintoti hanno equazioni

$$y = x \quad \quad y = -x$$

e sono rispettivamente le bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante

Iperbole equilatera riferita agli asintoti

Se operiamo una rotazione degli assi x e y intorno all'origine O, di ampiezza $\alpha = 45^\circ$, in senso orario, gli assi andranno a coincidere con gli asintoti.

Ogni punto dell'iperbole verrà quindi sottoposto alla trasformazione

$$T: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - X) \end{cases}$$

sostituendo nella $x^2 - y^2 = a^2$ otteniamo

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(Y-X)^2 = a^2$$

$$\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY - Y^2 - X^2 + 2XY) = a^2$$

$$2XY = a^2 \quad \text{e quindi}$$

$$XY = \frac{a^2}{2} \quad \text{ponendo } a^2 = k \quad \text{otteniamo}$$

$$XY = k$$

e tornando alle coordinate correnti possiamo scrivere

$$xy = k \quad (*)$$

che rappresenta l'equazione della proporzionalità inversa.

Se $k > 0$ l'iperbole appartiene al 1° e 3° quadrante (i punti hanno coordinate concordi)

Se $k < 0$ l'iperbole appartiene al 2° e 4° quadrante (i punti hanno coordinate discordi)

Iperbole equilatera traslata

Dimostriamo che l'equazione

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

rappresenta un'iperbole equilatera traslata

Eseguendo una traslazione degli assi di vettore $\vec{v}(X-p; Y-q)$ l'equazione (*) diventa

$$(X-p)(Y-q) = k$$

$$XY - qX - pY + pq = k$$

$$Y(X-p) = k + qX - pq \quad \text{e quindi}$$

$$Y = \frac{k + qX - pq}{(X-p)}$$

ponendo $p = -\frac{d}{c}$ $q = \frac{a}{c}$ $k - pq = \frac{b}{c}$ avremo

$$Y = \frac{\frac{a}{c}X + \frac{b}{c}}{X + \frac{d}{c}}$$

$$Y = \frac{aX + b}{cX + d}$$

che in generale si può scrivere

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (3)$$

Il centro di simmetria è $O'(p; q)$ e quindi $O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

Gli asintoti sono le rette

$$y = q \Leftrightarrow y = \frac{a}{c}$$

$$x = p \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$$

Osservazioni

La (3) non rappresenta un'iperbole nei seguenti casi

1. se $c = 0$ e $d \neq 0$ si ha

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} \quad \text{che rappresenta una retta}$$

2. Se $c \neq 0$ e

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$ad = bc$$

possiamo scrivere

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = h$$

ovvero

$$a = hc$$

$$b = hd$$

otteniamo

$$y = \frac{hcx + hd}{cx + d} = \frac{h(cx + d)}{cx + d} \quad \text{e quindi}$$

$$y = h$$

che rappresenta una retta parallela all'asse x .