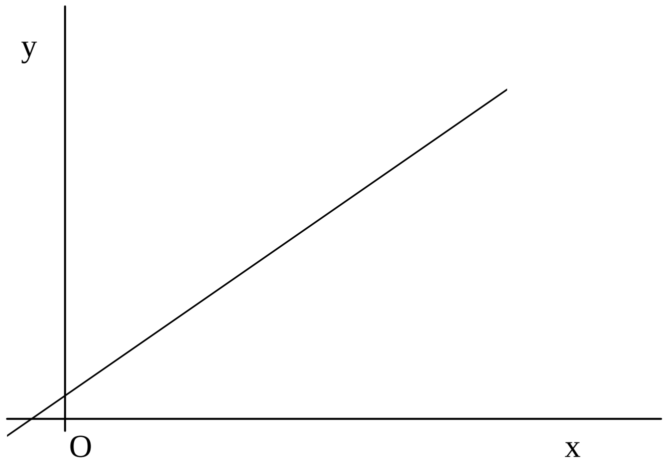
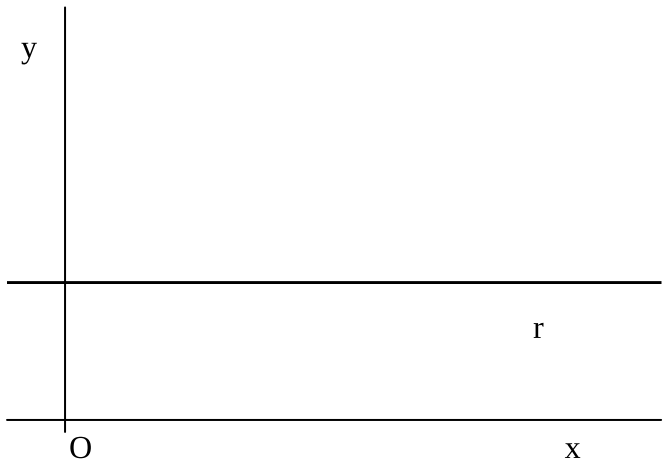
Rette in posizioni particolari rispetto al sistema di riferimento

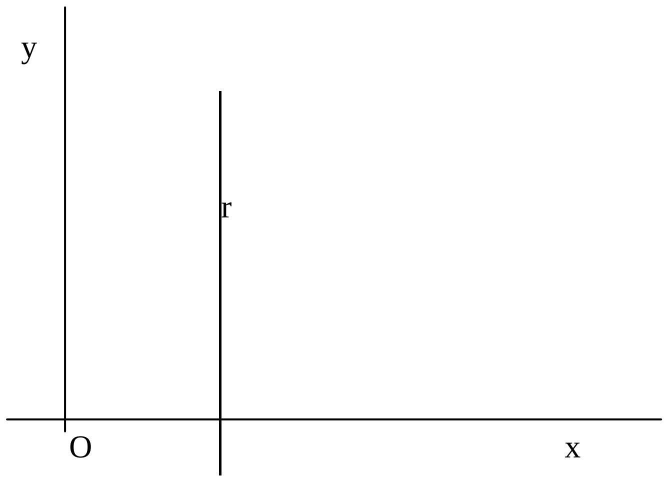
L'equazione affine di una retta $ax + by + c = 0$ può assumere forme particolari in relazione alla posizione della retta rispetto al sistema di riferimento o in relazione ad altri elementi.
1)Se una retta passa per l'origine 0 (0,0) vuol dire che (0,0) è una soluzione della sua equaz
ione e quindi è $c = 0$.Viceversa,se c = 0 la retta passa per 0(0,0). Dunque le rette passanti per l'origine 0(0,0) sono tutte e sole le rette $ax + by=0$,con a e b non entrambi nulli.



2)Se nell'equazione di una retta il coefficiente a è nullo, cioè la retta è del tipo $by + c = 0 \quad b \neq 0$, la retta stessa è parallela all'asse x. Essa è infatti il luogo dei punti (x, y) con x arbitrario e $y = -\dfrac{c}{b}$ costante.



3)Analogamente, se nell'equazione di una retta il coefficiente b è nullo, cioè la retta è del tipo $ax + c = 0 \quad a \neq 0$, allora la retta è parallela all'asse y.



Precisiamo infine che l'equazione $ax + by + c = 0$ si chiama equazione completa di una retta.

Equazione segmentaria della retta.

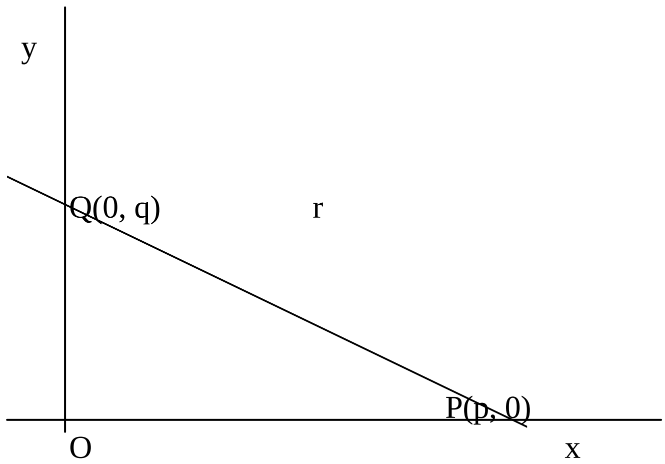
Consideriamo una qualunque retta del piano di equazione generica r del piano di equazione $ax + by + c = 0$. Se la retta non passa per l'origine e non è parallela ad un asse, i coefficienti a, b, c sono diversi da zero. Dividendo l'equazione per $-c$ si ha :

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - 1 = 0$$

Ponendo $-\frac{c}{a} = p \quad -\frac{c}{b} = q$ otteniamo

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \qquad (1)$$

Questa equazione prende il nome di equazione segmentaria della retta. I coefficienti p, q di tale equazione hanno un evidente significato geometrico.
Infatti i punti $P(p,0) \quad Q(0,q)$ della retta appartengono rispettivamente all'asse x e y, quindi p e q sono i segmenti che la retta stacca sugli assi.



Viceversa, note le intersezioni $P(p,0)$ $Q(0,q)$ della retta con gli assi, l'equazione della retta è proprio la (1).

Rappresentazione di una retta sotto la forma di determinante

Consideriamo una retta r individuata da due suoi punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

che si può anche scrivere nella forma affine

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

eliminando i denominatori si ha

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \quad \text{cioè}$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \qquad (1)$$

La (1) altro non è che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \qquad (a)$$

per cui l'equazione (1) è equivalente all'equazione

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

eseguiamo le seguenti trasformazioni sulle righe

$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$

$R_2 \longrightarrow R_1 - R_2$

otteniamo la matrice equivalente

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}$$

il cui determinante a parte il segno è uguale al determinante della matrice (b).
Sviluppando il determinante di tale matrice secondo la terza colonna si ottiene il determinante della matrice (a), per cui risulta

$Det(a) = 0 \Rightarrow Det(b) = 0 \Rightarrow Det(c) = 0$

In definitiva l'equazione (1) della retta r si può scrivere nella forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che rappresenta l'equazione della retta r passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Condizione di allineamento di tre punti

Utilizzando l'equazione della retta sotto forma di determinante, si può esprimere analiticamente la condizione affinché tre punti siano allineati.
Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinché tre punti $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ siano allineati è che si abbia :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione - Se i punti $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ sono allineati, essi appartengono ad una stessa retta, supponiamo che $P_3(x_3,y_3)$ appartenga alla retta individuata dai punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ e consideriamo l'equazione della retta in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Affinché $P_3(x_3,y_3)$ appartenga alla retta P_1P_2, le sue coordinate si devono poter esprimere mediante le due equazioni parametriche per un opportuno valore di t, cioè deve esistere un valore $\bar{t}$ tale che si abbia :

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + (x_2 - x_1)\bar{t} \\ y_3 = y_1 + (y_2 - y_1)\bar{t} \end{cases}$$

Dalla prima si ottiene

$x_3 = x_1 + \bar{t}x_2 - \bar{t}x_1$ e quindi

$x_3 = (1-\bar{t})x_1 + \bar{t}x_2$

Dalla seconda risulta

$y_3 = y_1 + \bar{t}y_2 - \bar{t}y_1$ cioè

$y_3 = (1-\bar{t})y_1 + \bar{t}y_2$

Tenendo presente che l'unità si può esprimere :

$1 = (1-\bar{t})\cdot 1 + \bar{t}\cdot 1$

si ottengono le relazioni

$x_3 = (1-\bar{t})x_1 + \bar{t}x_2$

$y_3 = (1-\bar{t})y_1 + \bar{t}y_2$

$$1 = (1-\bar{t})\cdot 1 + \bar{t}\cdot 1$$

Dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

si vede che la terza riga è una combinazione lineare delle prime due , per cui il suo determinante è nullo, cioè risulta

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Vale anche il viceversa, cioè se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

allora i tre punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ sono allineati. Se il determinante è nullo, una riga dovrà essere combinazione lineare delle altre due, supponiamo che tale riga sia la terza, avremo quindi che esisteranno dei parametri λ e μ tali che

$$(x_3, y_3, 1) = \lambda\ (x_1, y_1, 1) + \mu\ (x_2, y_2, 1) \qquad \lambda\ \mu \in \mathbf{R}$$

ovvero

$$x_3 = \lambda\ x_1 + \mu\ x_2$$
$$y_3 = \lambda\ y_1 + \mu\ y_2$$
$$1 = \lambda + \mu$$

Per dimostrare che $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ sono allineati dobbiamo verificare che appartengono alla stessa retta.

Consideriamo le equazioni parametriche della retta passante per i punti P_1 *e* P_2

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Affinché $P_3(x_3, y_3)$ appartenga alla retta P_1P_2 deve esistere un valore del parametro t tale che sostituito nelle equazioni precedenti si ottengono le coordinate di P_3.Le equazioni parametriche si possono scrivere

$$\begin{cases} x = x_1 + tx_2 - tx_1 \\ y = y_1 + ty_2 - ty_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$

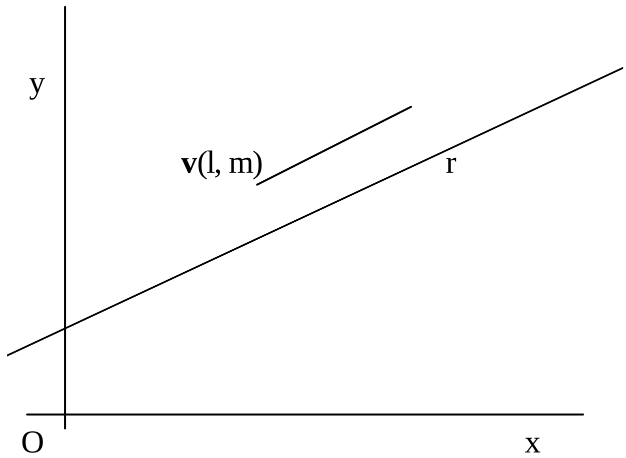
Tali equazioni danno le coordinate (x_3, y_3) del punto P_3 se in esse si pone

$1 - t = l \qquad t = m$ quindi il valore del parametro t per cui si ottengono le coordinate di P_3 sarà $t = 1 - l$.

Possiamo concludere pertanto che i tre punti sono allineati.

Parametri direttori e coefficiente direttivo (o angolare) di una retta

Consideriamo una retta r passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ ed avente la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}(l, m)$ ad essa parallelo. Abbiamo visto che i parametri direttori di una retta sono le componenti di un qualsiasi vettore non nullo parallelo alla retta, quindi i parametri direttori di r sono rispettivamente l, m. Per cui se si conoscono le componenti di un vettore parallelo ad una retta, si può individuare il valore dei parametri direttori di essa. Se la retta è data in forma parametrica



$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

I parametri direttori sono i coefficienti del parametro t, se la retta passa per i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \end{cases}$$

Se la retta è data in forma cartesiana

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$$

i parametri direttori sono i denominatori.
Data l'equazione cartesiana di una retta

$ax + by + c = 0$ si ha

$ax + c = -by$ e quindi

$$\frac{x + \frac{b}{a}}{-b} = \frac{y}{a}$$

per cui i parametri direttori sono

$$\begin{cases} l = -b \\ m = a \end{cases}$$

In generale se la retta è rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$ i parametri direttori saranno $(-b, a)$.
Consideriamo l'equazione cartesiana di una retta $ax + by + c = 0$ e supponiamo che $b \neq 0$, avremo :

$$by = -ax - c$$

e quindi

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Posto

$$k = -\frac{a}{b} \qquad p = -\frac{c}{b}$$

otteniamo

$$y = kx + p$$

questa equazione prende il nome di equazione implicita (o ridotta) della retta r, nella quale i coefficienti k e p hanno il seguente significato geometrico :
p rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta r con l'asse y, infatti, ponendo nell'equazione $x = 0$ si ottiene $y = p$

il coefficiente k prende il nome di coefficiente direttivo (o angolare) della retta r ed è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta r forma con l'asse x. Osserviamo che si ha $k = \frac{a}{-b} = \frac{m}{l}$, inoltre l'equazione della retta, parallela all'asse y (b = 0) non può essere scritta nella forma ridotta.

Intersezione di due rette Condizione di parallelismo

Siano r e r' due rette aventi rispettivamente equazioni

$$r: ax + by + c = 0$$
$$r: ax + by + c = 0$$

Il problema dell'intersezione delle due rette consiste nella ricerca del punto comune delle due rette, per cui basta risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice incompleta e completa del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile, per il teorema di Rouchè Capelli deve essere ρ(A) = ρ(AB).
Si possono presentare i seguenti casi
1° caso
ρ(A) = ρ(AB) = 2
Il sistema è compatibile, per cui risulta

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

pertanto ammetterà una sola soluzione.
Risolvendo il sistema con il metodo di Cramer si trova il punto di intersezione delle due rette.
2° Caso
ρ(A) = ρ(AB) = 1 Il sistema risulta compatibile, e per il teorema di Rouchè Capelli ammette ∞^1 soluzioni. Ciò significa che le due rette hanno infiniti punti in comune, cioè coincidono (le loro equazioni sono proporzionali) e quindi si ha

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

3° Caso

ρ(A) = 1 ρ(AB) = 2 In questo caso il sistema è incompatibile, cioè non ammette soluzioni, e le due rette non hanno alcun punto in comune, cioè sono parallele. Inoltre, essendo
ρ(A) = 1 risulta

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

e quindi le righe della matrice A sono proporzionali

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

mentre, essendo P(AB) = 2 le righe della matrice AB non sono proporzionali ed esiste un minore di ordine 2 avente il determinante non nullo, ne segue che

$$\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$$ in definitiva, si ha

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

Possiamo enunciare la condizione di parallelismo fra due rette.
Date due rette

$$r: ax + by + c = 0$$
$$r: ax + by + c = 0$$

affinché siano parallele occorre e basta che sia

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{od anche} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r$$

In generale si ha $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Se risulta $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

allora le due rette coincidono.
Si ha Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette r ed r' siano parallele è che i coefficienti di x e y delle rispettive equazioni, siano proporzionali.
Indicando con k e k' i coefficienti direttivi di tali rette avremo :

$$k = -\frac{a}{b} \qquad k' = -\frac{a'}{b'}$$

per cui affinché le due rette siano parallele dovrà aversi k = k'.

Osserviamo che :

1) Due rette parallele hanno parametri direttori proporzionali.

2) Due rette parallele hanno coefficienti direttori uguali e viceversa.

3)Se due rette sono parallele le loro equazioni differiscono al più per il termine noto.

Per cui, data la retta di equazione

$$ax + by + c = 0$$

tenendo fissi a e b e variando c, si ottengono le equazioni di tutte le rette parallele alla retta r.