Equazione della retta perpendicolare ad una retta data passante per un punto

Consideriamo una retta r di equazione

$$r: ax + by + c = 0$$

sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto del piano, determiniamo l'equazione della retta ortogonale ad r e passante per P_0.

Tenendo presente che il vettore $\mathbf{v}(a, b)$ risulta ortogonale ad r , possiamo scrivere l'equazione della retta cercata in forma parametrica. Per cui le equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

sono le equazioni di una retta passante per P_0 di parametri direttori (a, b), cioè rappresentano una retta perpendicolare ad r.

Determiniamo adesso l'equazione cartesiana di tale retta tenendo presente che tutte le rette ortogonali ad r hanno equazione del tipo

$$-bx + ay + k = 0 \qquad \text{con } k \in \mathbf{R}$$

che formano un fascio di rette.

Imponiamo quindi il passaggio per il punto P_0 e troviamo il valore di k. Si ha

$$-bx_0 + ay_0 + k = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$k = bx_0 - ay_0$$

Sostituendo tale valore nell'equazione si ha

$$-bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0$$

Otteniamo pertanto

$$-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

Dunque la (1) rappresenta l'equazione di una retta ortogonale ad r e passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$.

Equazione della retta parallela ad una retta data passante per un punto

In modo analogo al caso precedente possiamo determinare l'equazione della retta parallela ad una retta data e passante per un punto.

Sia data la retta

$$r: ax + by + c = 0$$

e $P_0(x_0, y_0)$ un punto del piano.

Il vettore $\mathbf{v}(-b, a)$ è parallelo ad r, per cui l'equazione della retta passante per P_0 e parallela ad r, in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$$

Per ottenere la retta in forma cartesiana scriviamo l'equazione del fascio di improprio di rette parallele ad r e determiniamo k imponendo il passaggio per P_0.

L'equazione del fascio è

$$ax + by + k = 0$$

Sostituendo le coordinate di P_0 otteniamo

$$ax_0 + by_0 + k = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$k = -ax_0 - by_0$$

sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ha

$$a + by - ax_0 - by_0 = 0 \qquad \text{e quindi}$$

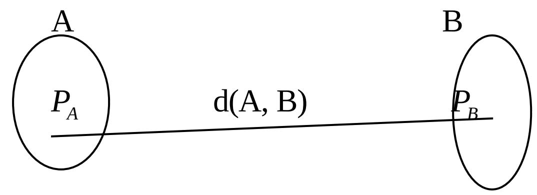
$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) = 0 \qquad (1)$$

La (1) rappresenta l'equazione cartesiana della retta passante per P_0 e parallela ad r.

Distanza tra due enti geometrici

Definizione - Siano A e B due enti geometrici; si definisce distanza tra A e B l'estremo inferiore dell'insieme delle lunghezze dei segmenti $P_A P_B$, dove P_A e P_B sono punti rispettivamente di A e di B. Si ha

$$d(A,B) = \inf\left\{ lungezze\ dei\ segmenti\ P_A P_B : P_A \in A \quad P_B \in B \right\}$$

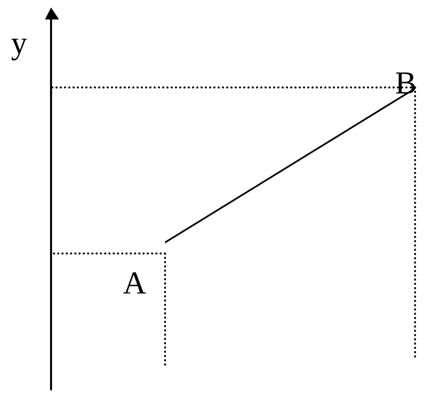


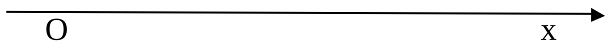
Da questa definizione discende che la distanza fra due enti geometrici è un numero positivo o nullo, cioè

$$d(A,B) \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

In particolare, se A e B sono due punti, la distanza tra A e B è la lunghezza del segmento AB, ovvero il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$, cioè

$$d(A,B) = \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$





Quindi, se A è il punto di coordinate $A(x_1, y_1)$ e B è il punto di coordinate $B(x_2, y_2)$, tenendo conto che il vettore $\overrightarrow{AB}$ ha componenti $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, risulta

$$\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1,\; y_2 - y_1)$$

si ha pertanto

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e quindi

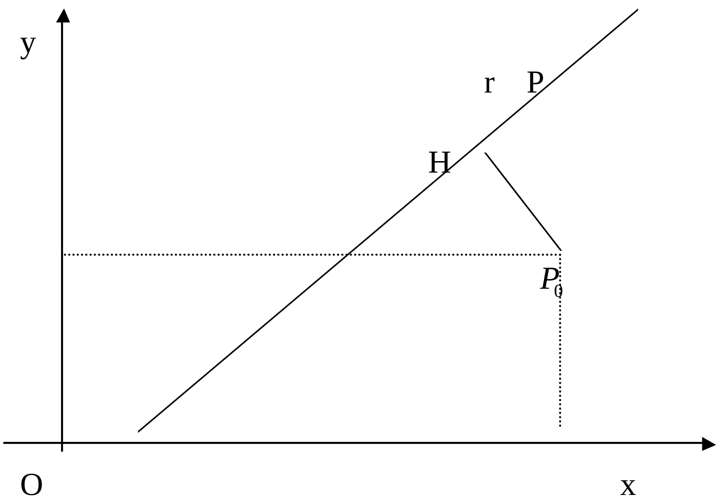
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distanza di un punto da una retta

Sia r una retta di equazione

$$r: ax + by + c = 0$$

e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto del piano.



Vogliamo trovare la distanza del punto P_0 dalla retta r.

In base alla definizione data di distanza fra due enti geometrici, tale distanza è il più piccolo tra tutti i segmenti che congiungono P_0 con i punti della retta. Detto H il piede del segmento ortogonale ad r condotto da P_0 e considerato un qualunque altro punto P della retta, il segmento P_0H è un cateto del triangolo rettangolo P_0HP, mentre il segmento P_0P rappresenta l'ipotenusa di tale triangolo, qualunque sia P.

Poiché in un triangolo rettangolo un cateto è sempre minore dell'ipotenusa, possiamo concludere che la lunghezza del segmento P_0 H rappresenta la distanza del punto P_0 dalla retta r.
Quindi, per determinare la distanza del punto P_0 dalla retta r, basta trovare le coordinate del punto H, intersezione della retta condotta da P_0 e ortogonale alla retta r ; il problema si riduce alla determinazione della distanza tra due punti.
Scriviamo l'equazione della retta passante per P_0 e ortogonale ad r in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r si ottengono le coordinate del punto H.

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo nella terza equazione i valori di x e y

$$a\left(x_0 + at\right) + b\left(y_0 + bt\right) + c = 0$$
$$ax_0 + a^2 t + by_0 + b^2 t + c = 0$$
$$\left(a^2 + b^2\right)t + ax_0 + by_0 + c = 0$$

La quantità $a^2 + b^2$ essendo somma di due quadrati è sempre diversa da zero, la quantità $ax_0 + by_0 + c$ è diversa da zero poiché P_0 non appartiene alla retta r, si ha quindi

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Sostituendo il valore del, parametro t nelle equazioni parametriche otteniamo

$$\begin{cases} x = x_0 - a\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \\ y = y_0 - b\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

che ci forniscono le coordinate del punto H.
La lunghezza del segmento P_0 H sarà

$$d\left(P_0 K\right) = \sqrt{\left(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 (ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2 (ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 (ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2 (ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}} = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

In definitiva, la distanza del punto P_0 dalla retta r è

$$d(P_0, r) = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Equazione normale di una retta

Sappiamo che una retta orientata si può pensare come l'insieme di una retta r e di un versore $\mathbf{r}(a, b)$ parallelo ad r. L'equazione della retta sia

$$r: ax+by+c=0 \qquad (*)$$

Tale equazione rappresenta la retta non orientata, aggiungendo un ulteriore elemento analitico, possiamo fare in modo che l'equazione rappresenti la retta orientata. Ciò è possibile poiché una retta è rappresentata dall'equazione (*) ma anche da una qualunque altra equazione ad essa proporzionale, è dunque possibile determinare un fattore di proporzionalità tale che l'equazione corrispondente determini univocamente la retta.

Definizione - Si definisce equazione normale di una retta r quella che gode della proprietà che la somma dei quadrati dei coefficienti delle variabili sia uguale a 1.

Proprietà - Se r è la retta di equazione

$$r: ax+by+c=0$$

allora la sua equazione normale è

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

Dimostrazione - La retta r ha ∞^1 rappresentazioni, quindi l'equazione

$$ax+by+c=0$$

rappresenta la retta a meno di un fattore dei proporzionalità. Dunque una qualunque equazione che rappresenta la retta r , sarà del tipo

$$r\ ax + r\ by + r\ c = 0 \qquad (**)$$

con ρ coefficiente di proporzionalità non nullo.

Per ricavare dall'equazione precedente l'equazione normale della retta r occorre determinare il coefficiente di proporzionalità ρ. In base alla definizione di equazione normale di una retta, affinché l'equazione (**) sia l'equazione normale di r deve essere

$$(r\ a)^2 + (r\ b)^2 = 1$$

$$r^2(a^2+b^2) = 1 \qquad \text{e quindi}$$

$$r == \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Per cui, l'equazione normale della rette è

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

L'equazione normale della retta r rappresenta dunque univocamente la retta orientata r.

Osservazione - Scritta l'equazione normale di una retta r nella forma

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ovvero

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

notiamo che i coefficienti delle variabili rappresentano i coseni direttori della retta normale ad r.
Infatti, data la retta

$$r\colon ax+by+c=0$$

sappiamo che il vettore $\mathbf{v}(a,b)$ è ortogonale ad r e individua dunque una retta r' ortogonale ad r.
Il versore **v'** di **v** ha componenti

$$\mathbf{v}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Infatti il modulo di tale vettore è

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}=1$$

Quindi **v'** è un versore parallelo a **v** e quindi ad r'. I coseni direttori di r' sono, per definizione, le componenti del versore **v'** e si ha

$$\cos\widehat{xr'}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\cos\widehat{yr'}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad(1)$$

Il termine noto dell'equazione normale della retta r è la distanza di tale retta dall'origine $O(0,0)$.
Infatti si ha

$$d(O,r)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Posto

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=p$$

e tenendo conto delle (1), l'equazione normale della retta r si può scrivere

$$(\cos\widehat{xr'})x+(\cos\widehat{yr'})=p$$

Consideriamo il piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ in cui è definito un sistema cartesiano ortogonale O x y. Si ha la seguente

Proprietà - Ogni retta r passante per l'origine di $\mathbf{R}^2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1.

Dimostrazione - Una qualunque retta passante per l'origine ha equazione

$$r\colon ax + by = 0 \qquad (1)$$

Da un punto di vista insiemistico possiamo interpretare la retta r come l'insieme dei punti del piano soddisfacenti l'equazione (1), cioè

$$r = \left\{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbf{R}^2 : a\overline{x} + b\overline{y} = 0\right\}$$

L'equazione

$$ax + by = 0$$

è un particolare sistema omogeneo la cui matrice è

A = (a, b)

A tale matrice possiamo associare l'applicazione lineare

$$j : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

che ad un punto X del piano associa il numero AX di **R**, cioè

$$X \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow AX \in \mathbf{R}$$

(AX è il valore assunto dall'equazione $ax + by = 0$ quando si sostituiscono alle variabili le coordinate del punto X)

Sappiamo che le soluzioni del sistema omogeneo precedente coincidono con il nucleo dell'applicazione lineare φ , l'insieme di queste soluzioni è proprio la retta r, per cui si ha

r = ker φ

Poiché $\ker j$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$, anche r è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. Inoltre si ha

$$\dim r = \dim \ker j = 2$$

Dunque $j = 2 - 1 = 1$ e dim r = 1.

Osservazione - Consideriamo una qualunque retta del piano non passante per l'origine, essa ha equazione

$$r\colon ax + by + c = 0$$

e non è soddisfatta dalla coppia (0, 0), quindi l'insieme delle soluzioni di questa equazione non contiene lo zero di $\mathbf{R}^2$, cioè

$$O(0,0) \notin r$$

Pertanto la retta r, non contenendo l'elemento nullo, non è uno spazio vettoriale, ossia non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.