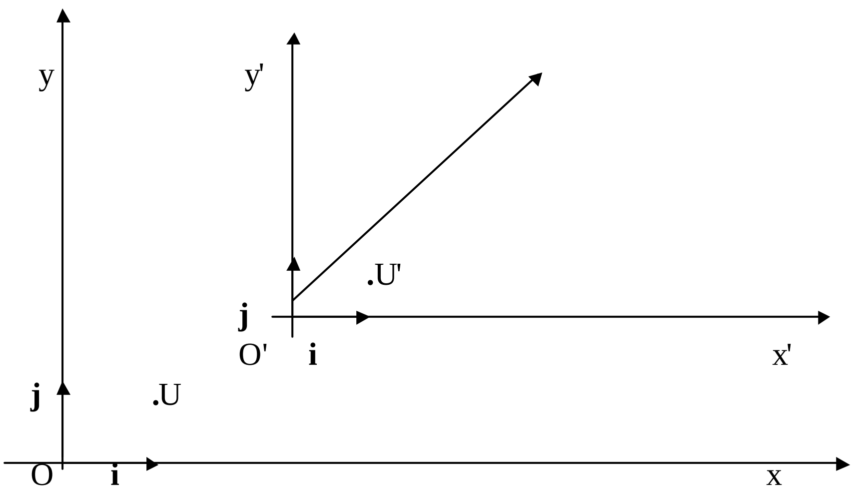
CAMBIAMENTI DI SISTEMA DI RIFERIMENTO

Consideriamo il piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ con un sistema di riferimento (O,U). Se introduciamo in $\mathbf{R}^2$ un secondo sistema di riferimento (O',U'), si pone il problema di trovare delle leggi di trasformazione che permettono di passare da un sistema di riferimento ad un altro, cioè ricavare delle leggi che permettono, note le coordinate di un punto (o l'equazione di un qualunque ente geometrico) rispetto al primo sistema di riferimento, di conoscere le coordinate dello stesso punto (ovvero l'equazione dell'ente geometrico) rispetto all'altro sistema.
Prendiamo in considerazione tre operazioni che consentono di passare da un sistema di riferimento ad un altro :

1) Traslazione
2) Rotazione
3) Rototraslazione

Traslazione



Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O ;U) in $\mathbf{R}^2$ di versori fondamentali (**i**, **j**), consideriamo un secondo sistema (O',U') tale che

1) $O \neq= O'$
2) Gli assi x' e y' sono paralleli rispettivamente a x e y, cioè x'//x y'//y
3) Il punto U' è tale che stacca sugli assi (x',y') i versori (**i**, **j**)

Supponiamo che O' abbia coordinate (a, b) rispetto al primo sistema di riferimento
O'(a, b) in (O,U)
Sia P un punto del piano avente coordinate (x, y) rispetto al primo sistema di riferimento e (x', y') rispetto al secondo, cioè
P(x, y) rispetto a (O,U)
P(x', y') rispetto a (O;U')

Ci proponiamo di trovare delle leggi di trasformazione che permettono di passare dalle coordinare (x, y) di P in (O,U) alle coordinate (x', y') dello stesso punto in (O',U'). A tale scopo consideriamo, i vettori $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P}$ di componenti rispettivamente

$$\overrightarrow{OP}(x, y), \quad \overrightarrow{OO'}(a,b), \quad \overrightarrow{O'P}(x', y')$$

Si ha

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \qquad (1)$$

Le (1) rappresentano le leggi di trasformazione che permettono di passare dal sistema O x y al sistema O' x' y'. Esse si possono anche scrivere nella forma

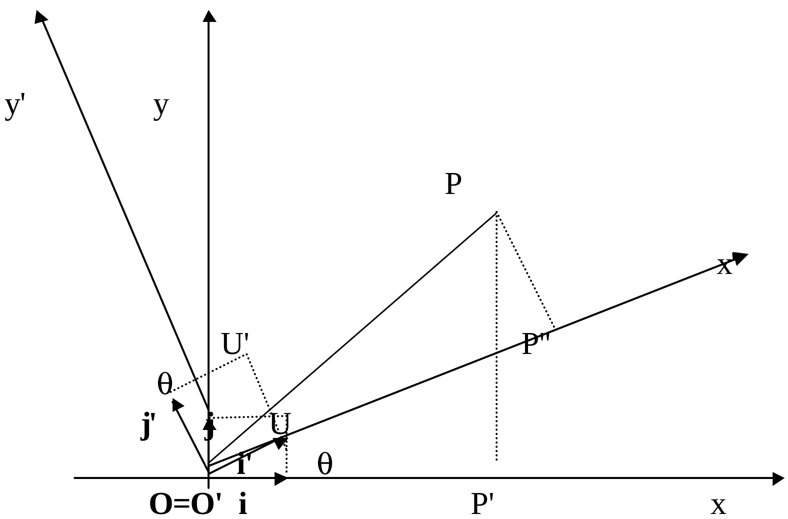
$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad (1')$$

Rotazione

Dato il sistema cartesiano ortogonale (O,U) di versori fondamentali **(i, j)** consideriamo il nuovo sistema (O',U') tale che

1) $O \neq O'$
2) Gli assi x' e y' sono ruotati rispetto agli assi x y di un angolo J
3) Il punto U' è tale che stacca sugli assi (x', y') i versori (**i, j**) che sono ottenuti dai versori **i, j** con una rotazione di un angolo J .

Sia P un punto di $\mathbf{R}^2$ avente coordinate (x, y) rispetto al primo sistema di riferimento



P(x, y) in (O, U)
e coordinate (x', y') nel secondo sistema di riferimento
P(x', y') in (O',U')
Allora si ha

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$$

e quindi

$$\overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad (1)$$

Si ha anche

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP''} + \overrightarrow{P''P}$$

quindi si ha

$$\overrightarrow{OP} = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' \qquad (2)$$

Dalle (1) e (2) si possono ottenere le leggi di trasformazione. A tale scopo ricordiamo che un vettore **v** del piano si può scomporre nella somma di due vettori orientati secondo gli assi cartesiani e ottenuti come prodotto delle componenti del vettore per i rispettivi versori fondamentali, cioè, se **v** è un vettore $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ si ha

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

Come sappiamo, le componenti v_x, v_y di tale vettore, si ottengono come prodotto scalare tra il vettore ed il rispettivo versore, cioè si ha

$$v_x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{i}$$
$$v_y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$$

Per cui avremo

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j}$$

Tenendo presente quest'ultima relazione otteniamo

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}' = (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j}$$

Essendo **i, i', j, j'** versori, si ha (il prodotto scalare di due versori è dato dal coseno dell'angolo da essi formato)

$$\mathbf{i}' = \cos\vartheta\ \mathbf{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\mathbf{j} = \cos\vartheta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\vartheta\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)\ \mathbf{i} + \cos\vartheta\ \mathbf{j} = -\operatorname{sen}\vartheta\ \mathbf{i} + \cos\vartheta\ \mathbf{j}$$

In definitiva, le uguaglianze

$$\mathbf{i}' = \cos\vartheta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\vartheta\ \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}' = -\operatorname{sen}\vartheta\ \mathbf{i} + \cos\vartheta\ \mathbf{j}$$

rappresentano le relazioni fra i versori **i** e **j** del primo sistema di riferimento e i versori **i', j'** del secondo sistema. Sostituendo tali relazioni nell'uguaglianza (2) si ha :

$$\overrightarrow{OP} = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' = x'(\cos J\ \mathbf{i} + \operatorname{sen} J\ \mathbf{j}) + y'(-\operatorname{sen} J\ \mathbf{i} + \cos J\ \mathbf{j})$$

$$\overrightarrow{OP} = (x'\cos J - y'\operatorname{sen} J)\,\mathbf{i} + (x'\operatorname{sen} J + y'\cos J)\,\mathbf{j}$$

Dalle (1) si ha

$$\overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

Per cui

$$(x'\cos J - y'\operatorname{sen} J)\,\mathbf{i} + (x'\operatorname{sen} J + y'\cos J)\,\mathbf{j} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

Otteniamo pertanto

$$\begin{cases} x = x'\cos J - y'\operatorname{sen} J \\ y' = x'\operatorname{sen} J + y'\cos J \end{cases}$$

che rappresentano le leggi di trasformazione per passare da un riferimento O x' y' ad un altro O x y in cui gli assi risultano ruotati di un angolo θ.
Per determinare le formule inverse basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x = x'\cos J - y'\operatorname{sen} J \\ y' = x'\operatorname{sen} J + y'\cos J \end{cases}$$

rispetto alle variabili x' e y'.
Il sistema ammette una sola soluzione se il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos J & -\operatorname{sen} J \\ \operatorname{sen} J & \cos J \end{pmatrix}$$

è diverso da zero. Essendo $\det A = \pm 1$ otteniamo

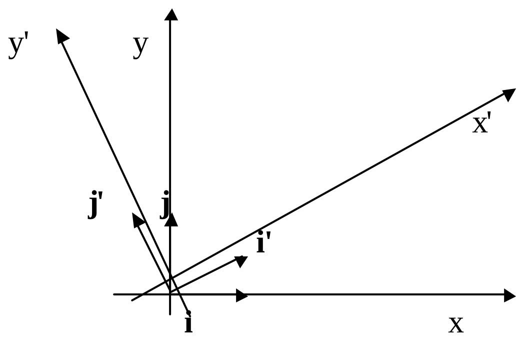
$$\begin{cases} x' = x\cos J + y\operatorname{sen} J \\ y' = -x\operatorname{sen} J + y\cos J \end{cases}$$

Osservazione - Consideriamo la matrice

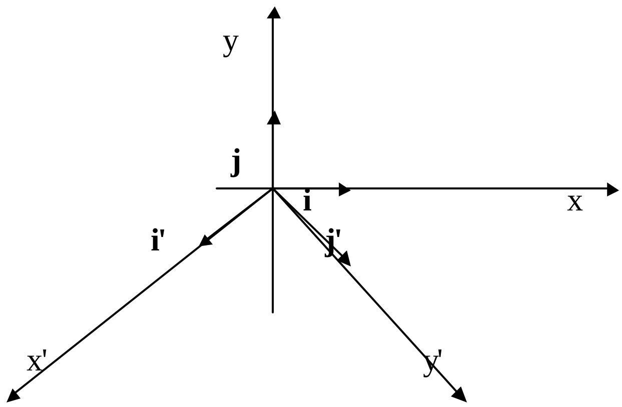
$$A = \begin{pmatrix} \cos J & -\operatorname{sen} J \\ \operatorname{sen} J & \cos J \end{pmatrix}$$

detta matrice della trasformazione. Essa gode delle seguenti proprietà:

1) $\det A = \pm 1$
La scelta del segno dipende dall'orientamento dei versori e quindi dei due sistemi di riferimento. Se i die sistemi di riferimento sono concordi il determinante è uguale a 1



se sono discordi è uguale a - 1

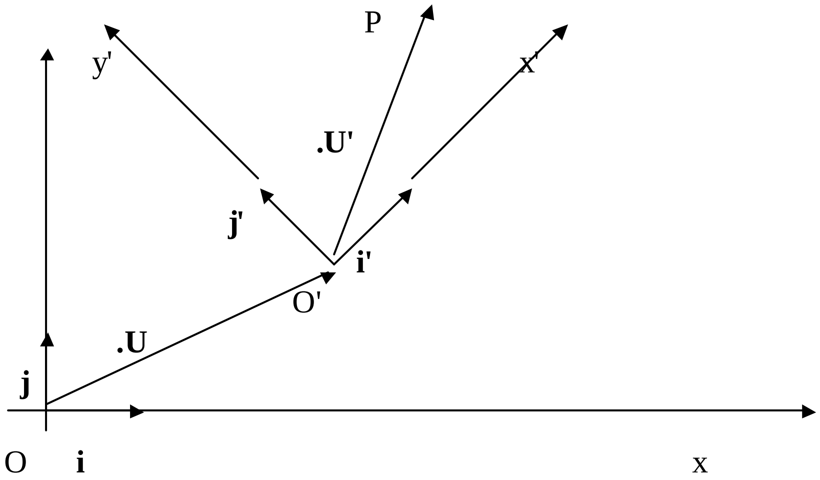


2) Ogni elemento coincide con il suo complemento algebrico
3) $A^{-1} = {}^{t}A$
4) La somma dei quadrati degli elementi di una linea è uguale a ± 1.
5) La somma dei prodotti degli elementi corrispondenti di due linee parallele è uguale a zero. Tale somma è $\cos J \ \operatorname{sen} J - \operatorname{sen} J \ \cos J$, essa coincide con la somma dei prodotti degli elementi di una riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra riga, ed è nulla per il 2° teorema di Laplace.

La matrice A è una matrice ortogonale.

Definizione - Una matrice quadrata A di ordine n si dice ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta, cioè se risulta
$A^{-1} = {}^{t}A$.

Rototraslazione



Sia (O,U) un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di versori fondamentali (**i**, **j**) e sia (O',U') un secondo sistema di riferimento tale che :

1) $O' \equiv O$
2) Gli assi x' e y' non sono paralleli a x e y e risultano ruotati di un angolo θ rispetto a x, y.
3) U' è tale che stacca sugli assi x' e y' i versori **i', j'** ruotati di un angolo θ rispetto ai versori **i, j**.

Sia P un punto del piano avente coordinate (x, y) nel primo sistema di riferimento e (x', y') nel secondo sistema di riferimento.

P(x, y) in (O,U)
P(x', y') in (O',U')

Avremo

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}'$$

$$x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' = (x-a)\,\mathbf{i} + (y-b)\,\mathbf{j}$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri prima per **i'** e poi per **j'** otteniamo

$$x'\,\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i}' = (x-a)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' + (y-b)\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}'$$

essendo

$\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i}' = 0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$ avremo

$$x' = (x-a)\cos\theta + (y-b)\operatorname{sen}\theta$$

Inoltre avremo

$$x'\,\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' + y'\,\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j}' = (x-a)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' + (y-b)\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'$$

essendo

$$\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' = 0 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right) = -\operatorname{sen}\vartheta$$

avremo

$$y' = -(x-a)\operatorname{sen}\vartheta + (y-b)\cos\vartheta$$

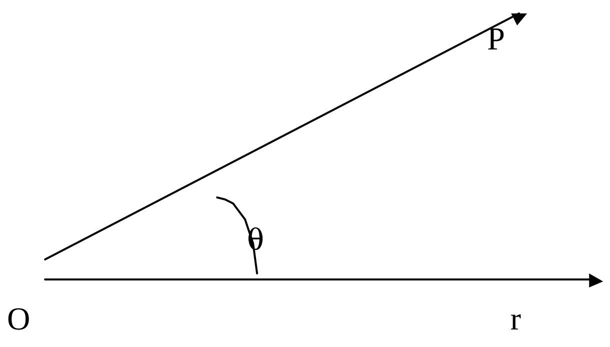
Le leggi di trasformazione saranno

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\vartheta + (y-b)\operatorname{sen}\vartheta \\ y' = -(x-a)\operatorname{sen}\vartheta + (y-b)\cos\vartheta \end{cases}$$

Da queste si possono ottenere come casi particolari le leggi precedenti di traslazione ($\theta = 0$) e di rotazione ($(a, b) = (0, 0)$).

Coordinate polari

Fissiamo nel piano un verso positivo per le rotazioni, ad esempio quello antiorario, una unità di misura per le lunghezze ed il radiante come unità di misura degli angoli. Un sistema di coordinate polari è costituito da un punto detto polo e da una semiretta orientata r uscente da O detta asse polare



Ad un punto generico P del piano vengono associati due numeri

1) il modulo ρ del vettore $\overrightarrow{OP}$ con $\rho \geq 0$

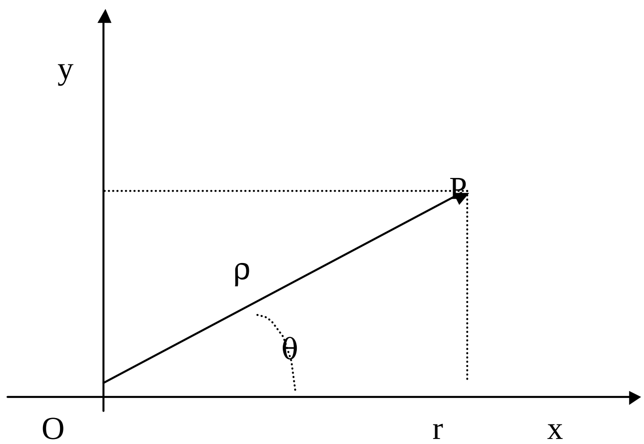
2) la misura θ (in radianti) dell'angolo orientato formato dalla retta r e dal vettore $\overrightarrow{OP}$ tale che $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

θ prende il nome di anomalia del punto P.

Viceversa, data una coppia (a, α) tale che $a \geq 0$ e $0 \leq a \leq 2p$ afd essa si può associare uno ed un solo punto del piano. Tale punto è l'estremo del vettore $\overrightarrow{OP}$ giacente sulla semiretta uscente dal polo O e ruotata rispetto all'asse polare, nel verso positivo delle rotazioni, dell'angolo α ed avente modulo uguale ad a.
Si ottiene pertanto una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie del tipo $(r\ ,J\ )$ con $0 \leq J \leq 2p$. A tale corrispondenza biunivoca fa eccezione il ,polo O che ha modulo nullo e una anomalia J indeterminata, per cui ad esso corrispondono tutte le coppie $(0\ ,J\ )$.

Relazioni fra coordinate polari e coordinate cartesiane

Consideriamo un sistema di coordinate polari (0, r) ed un sistema di riferimento cartesiano che abbia l'origine nel polo O, il semiasse positivo dell'asse x coincidente con l'asse polare r e l'asse y scelto in modo che l'angolo orientato $\widehat{xy} = \frac{p}{2}$



Se un punto P del piano ha coordinate $(r\ ,J\ )$ nel riferimento polare e (x, y) nel riferimento cartesiano, si ha :

$$\begin{cases} x = r\ \cos J \\ y = r\ \operatorname{sen} J \end{cases}$$

che sono, le relazioni tra le coordinate polari e cartesiane di uno stesso punto e rappresentano le formule di trasformazione dal riferimento polare a quello cartesiano.
Essendo

$$x^2 + y^2 = r^{\ 2} \qquad \frac{y}{x} = tg\,J$$

otteniamo le formule inverse

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$J = \text{arctg}\,\frac{y}{x} \qquad \text{con} \qquad 0 \le J \le 2p$$

Osservazione - In un sistema di coordinate cartesiane si hanno le cosidette linee cartesiane date da x = cost   y = cost che risultano parallele agli assi. Nel caso delle coordinate polari le linee coordinate sono del tipo

a) $r = r_0 = \text{cost}$ che corrispondono a circonferenze concentriche con il centro nel polo O.

b) $J = J_0 = \text{cost}$ che sono tutte le semirette uscenti dal polo.